

SKEMA KAEDAH LELARAN KUMPULAN TAK TERSIRAT TERUBAHSUI BAGI PERSAMAAN RESAPAN SATU MATRA

Jumat Sulaiman¹, Mohamed Othman² dan Abdul Rahman Abdullah³

¹Sekolah Sains dan Teknologi, Universiti Malaysia Sabah

²Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar, Universiti Putra Malaysia

³Fakulti Teknologi dan Sains Maklumat, Universiti Kebangsaan Malaysia

ABSTRACT: The aim of this paper is to introduce the application of the Modified Explicit Group (MEG) iterative method to solve the one dimensional diffusion equations. In this paper, the 2, 3 and 4-point Explicit Group (EG) and MEG iterative methods scheme are derived.

Abstrak: Tujuan kertas ini untuk memperkenalkan aplikasi kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai (KTTT) untuk menyelesaikan persamaan resapan satu matra. Dalam kertas ini, skema 2, 3 dan 4 Titik kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat (KTT) dan KTTT juga dirumuskan.

1. Pengenalan

Pertimbangkan masalah nilai awal-sempadan yang membabitkan persamaan parabolik yang memperihalkan pengaliran haba. Kertas kerja ini menekankan perbincangan penyelesaian berangka bagi persamaan resapan satu matra yang ditakrifkan sebagai

$$\frac{\partial U}{\partial t} = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T] \quad (1.1)$$

dengan v parameter resapan. Sementara itu, penyelesaian bagi masalah (1.1) pula bergantung kepada syarat sempadan Dirichlet

$$U(0, t) = g_1(t), t > 0$$

$$U(1, t) = g_2(t), t > 0$$

dan syarat awal

$$U(x, 0) = g_3(x), 0 \leq x \leq 1$$

2. Penghampiran Beza Terhingga

Dalam kertas kerja ini, kita hanya mempertimbangkan kaedah Crank-Nicolson untuk mendapatkan persamaan penghampiran beza terhingga bagi persamaan (1.1). Untuk setiap terbitan separa selanjur dalam persamaan (1.1) perlu digantikan oleh purata penghampiran beza terhingga kecuali pada masa dan dapat ditunjukkan seperti di bawah.

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta t} + O((\Delta t)) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \right] + O((\Delta x)^2) \quad (2.2)$$

Sekiranya penghampiran (2.1) dan (2.2) digantikan ke atas masalah (1.1), boleh diperolehi suatu persamaan penghampiran beza terhingga seperti berikut;

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = \frac{v\Delta t}{2((\Delta x)^2)} \left[U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j} \right] \quad (2.3)$$

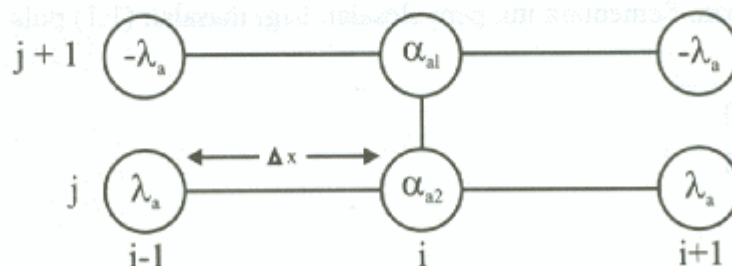
Kemudiannya persamaan [5.1.7] boleh diolahkan semula sehingga bentuk yang berikut diperolehi;

$$-\lambda_a U_{i-1,j+1} + \alpha_{a1} U_{i,j+1} - \lambda_a U_{i+1,j+1} = f_{i,j}^a \quad (2.4)$$

dengan,

$$\lambda_a = \frac{v\Delta t}{2((\Delta x)^2)}, \quad \alpha_{a1} = 1 + 2\lambda_a, \quad \alpha_{a2} = 1 - 2\lambda_a,$$

$$f_{i,j}^a = \lambda_a U_{i-1,j} + \alpha_{a2} U_{i,j} + \lambda_a U_{i+1,j}$$



Rajah 1: Molekul pengiraan bagi skema kaedah C-N sapuan penuh

Perhatikan Rajah 1 bagi persamaan penghampiran (2.4) pada paras masa ke-(j+1), persamaan ini digunakan untuk melaksanakan kaedah lalaran sapuan penuh. Seterusnya, kita cuba mendapatkan persamaan penghampiran beza terhingga untuk kes pelaksanaan kaedah lalaran separuh sapuan dan separa sapuan. Pertimbangkan beza purata penghampiran beza terhingga bagi $2\Delta x$ dan $4\Delta x$ yang masing-masing ditakrifkan sebagai

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i-2,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+2,j+1}}{(2\Delta x)^2} + \frac{U_{i-2,j} - 2U_{i,j} + U_{i+2,j}}{(2\Delta x)^2} \right] + O((\Delta x)^2) \quad (2.5)$$

dan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i-4,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+4,j+1}}{(4\Delta x)^2} + \frac{U_{i-4,j} - 2U_{i,j} + U_{i+4,j}}{(4\Delta x)^2} \right] + O((\Delta x)^2) \quad (2.6)$$

Dengan menggantikan persamaan (2.2) dan (2.5) ke atas persamaan (1.1), boleh ditunjukkan bahawa

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = \frac{v\Delta t}{2((2\Delta x)^2)} \left[U_{i-2,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+2,j+1} + U_{i-2,j} - 2U_{i,j} + U_{i+2,j} \right] \quad (2.7)$$

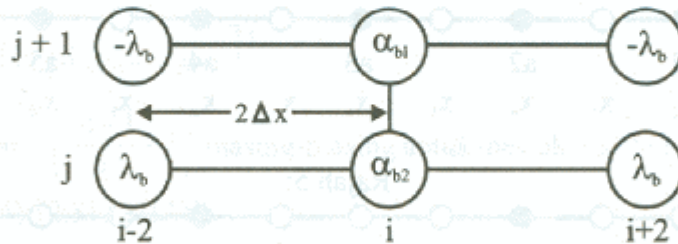
Jika persamaan (2.7) diolahkan semula sehingga bentuk ringkas diperolehi seperti berikut:

$$-\lambda_b U_{i-2,j+1} + \alpha_{b1} U_{i,j+1} - \lambda_b U_{i+2,j+1} = f_{i,j}^b \quad (2.8)$$

dengan,

$$\lambda_b = \frac{v\Delta t}{2((2\Delta x)^2)}, \quad \alpha_{b1} = 1 + 2\lambda_b, \quad \alpha_{b2} = 1 - 2\lambda_b,$$

$$f_{i,j}^b = \lambda_b U_{i-1,j} + \alpha_{b2} U_{i,j} + \lambda_b U_{i+1,j}$$



Rajah 2: Molekul pengiraan bagi skema kaedah C-N separuh sapuan

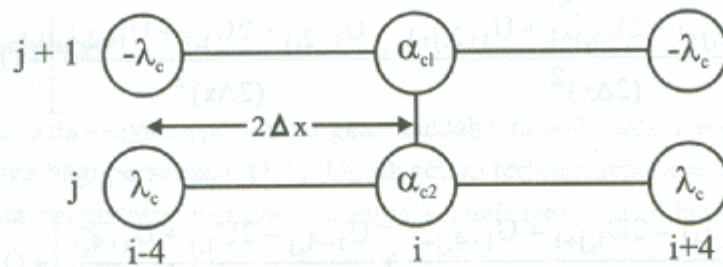
Menerusi cara yang sama diperolehi persamaan (2.4) dan (2.8). Persamaan (2.6) digunakan untuk mendapatkan persamaan penghampiran beza terhingga bagi kes separa sapuan yang boleh diungkapkan sebagai

$$-\lambda_c U_{i-4,j+1} + \alpha_{c1} U_{i,j+1} - \lambda_c U_{i+4,j+1} = f_{i,j}^c \quad (2.9)$$

dengan,

$$\lambda_c = \frac{v\Delta t}{2((4\Delta x)^2)}, \quad \alpha_{c1} = 1 + 2\lambda_c, \quad \alpha_{c2} = 1 - 2\lambda_c,$$

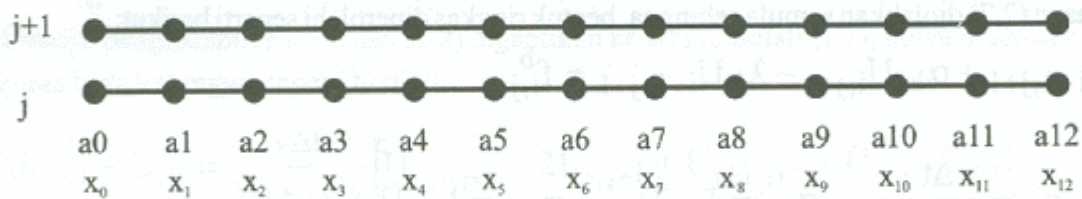
$$f_{i,j}^c = \lambda_c U_{i-1,j} + \alpha_{c2} U_{i,j} + \lambda_c U_{i+1,j}$$



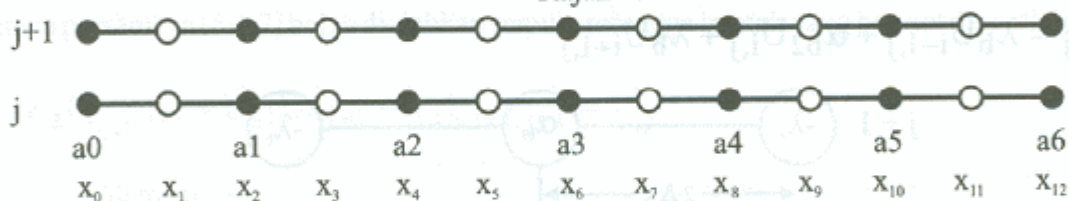
Rajah 3: Molekul pengiraan bagi skema kaedah C-N separa sapan

3. Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai

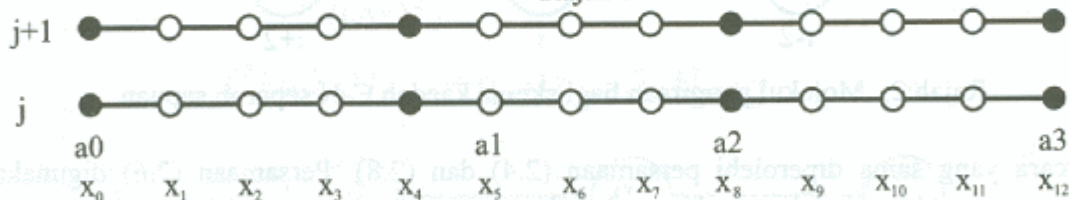
Pertimbangkan pada paras masa ke- j dan $j+1$, domain dipartisikan kepada beberapa subselang seperti ditunjukkan oleh Rajah 4, 5 dan 6.



Rajah 4:



Rajah 5:



Rajah 6:

Dalam kes lelaran separuh sapan pada Rajah 5, kita membangunkan kaedah lelaran KTTT separuh atau separa sapan yang konsepnya sama seperti kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat Nyah-Pasangan(KTTNP) yang diperkenalkan dalam Abdul Rahman (1991). Pelaksanaan lelaran titik KTTT menggunakan ● persamaan penghampiran (2.8) hanya dilakukan ke atas titik-titik yang ditandakan ○ sehingga lelaran penumpuan dicapai. Manakala penyelesaian pada baki titik-titik lain diperolehi secara kaedah terus menggunakan persamaan (2.4). Pendekatan lelaran separa sapan pula adalah serupa

Dengan menentukan matriks songsangan bagi matriks pekali (3.2), pelaksanaan kaedah lelaran 2 Titik-KTT boleh dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{ai,j+1} \\ U_{ai+1,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{p^2 - q^2} \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3.2 Formulasi 3 Titik-KTTT

Skema kaedah lelaran 3 Titik-KTT dibentuk daripada sekumpulan 3 titik jenis ● berturutan. Sekumpulan titik ini pula menjanakan suatu sistem persamaan linear (3x3) seperti berikut;

$$\begin{bmatrix} p & -q & 0 \\ -q & p & -q \\ 0 & -q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ai,j+1} \\ U_{ai+1,j+1} \\ U_{ai+2,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

dengan,

$$S_1 = qU_{ai,j+1} + f_{ai,j}$$

$$S_2 = f_{ai+1,j}$$

$$S_3 = qU_{ai+3,j+1} + f_{ai+2,j}$$

Seterusnya tentukan matriks songsangan bagi matriks pekali (3.4), boleh dinyatakan suatu sistem persamaan baru sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{ai,j+1} \\ U_{ai+1,j+1} \\ U_{ai+2,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{p(p^2 - 2q^2)} \begin{bmatrix} p^2 - q^2 & pq & q^2 \\ pq & p^2 & pq \\ q^2 & pq & p^2 - q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Bila diperhatikan sistem persamaan (3.5), matriks songsangan bagi matriks pekali (3.4) adalah suatu matriks penuh. Akibatnya berlaku peningkatan kerumitan pengiraan bagi sistem persamaan (3.5). Pertimbangkan matriks songsangan bagi matriks pekali sistem persamaan (3.4) boleh diwakilkan sebagai hasil tambah dua matriks yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p(p^2 - 2q^2)} \begin{bmatrix} p^2 - q^2 & pq & q^2 \\ pq & p^2 & pq \\ q^2 & pq & p^2 - q^2 \end{bmatrix} \\ & = \frac{1}{p(p^2 - 2q^2)} \left[\begin{bmatrix} q(q) & v_3(p) & q(q) \\ p(q) & v_1(p) & p(q) \\ q(q) & v_2(p) & q(q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p^2 - 2q^2 & & \\ & 0 & \\ & & p^2 - 2q^2 \end{bmatrix} \right] \quad (3.6) \end{aligned}$$

Oleh itu, kerumitan pengiraan bagi sistem persamaan linear (3.5) boleh dikurangkan dengan teknik melakukan dua pengiraan yang setiap satu disimpan pada satu pembolehubah untuk digunakan berulang kali (Jumat,1998). Secara umumnya, pelaksanaan sistem persamaan ini boleh ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{ai,j+1} \\ U_{ai+1,j+1} \\ U_{ai+2,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{pp_a} \begin{bmatrix} qu_a + p_a S_1 \\ pv_a \\ qu_v + p_a S_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

dengan,

$$p_a = p^2 - 2q^2, v_a = q(S_1 + S_3) + pS_2$$

3.3 Formulasi 4 Titik-KTTT

Perbincangan seterusnya tentang pembangunan skema kaedah lelaran 4 Titik-KTT yang membabitkan sekumpulan 4 titik jenis ● berturutan yang menjanakan suatu sistem persamaan linear (4x4) dan boleh dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} p & -q & 0 & 0 \\ -q & p & -q & 0 \\ 0 & -q & p & -q \\ 0 & 0 & -q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ai,j+1} \\ U_{ai+1,j+1} \\ U_{ai+2,j+1} \\ U_{ai+3,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ai,j} \\ f_{ai+1,j} \\ f_{ai+2,j} \\ f_{ai+3,j} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

dengan,

$$S_1 = qU_{ai,j+1} + f_{ai,j}$$

$$S_2 = f_{ai+1,j}$$

$$S_3 = f_{ai+2,j}$$

$$S_4 = qU_{ai+4,j+1} + f_{ai+3,j}$$

Seterusnya darabkan sistem persamaan (3.8) dengan matriks songsangan bagi matriks pekalinnya dan kemudiannya menerusi teknik pengurangan kerumitan pengiraan, skema kaedah lelaran 4 Titik-KTTT boleh dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{ai,j+1} \\ U_{ai+1,j+1} \\ U_{ai+2,j+1} \\ U_{ai+3,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{p_c} \begin{bmatrix} pp_a S_1 + qv_a \\ qp_b S_1 + pv_a \\ qp_b S_4 + pv_b \\ pp_a S_4 + qv_b \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

dengan,

$$p_a = p^2 - 2q^2, p_b = p^2 - q^2, p_c = p^2 p_a - q^2 p_b$$

$$v_a = p_b S_2 + pq S_3 + q^2 S_4$$

$$v_b = q^2 S_1 + pq S_2 + p_b S_3$$

4. Keputusan Berangka

Semua ujikaji berangka yang telah dilakukan terhadap persamaan resapan satu matra yang membabitkan masa t seperti berikut:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, (x, t) \in [0,1] \times [0, T] \tag{4.1}$$

yang $v = 1.0$. Sementara itu, syarat sempadannya diberikan oleh

$$U(0, t) = 0, t > 0$$

$$U(1, t) = 0, t > 0 \tag{4.2}$$

dan syarat awal ($t = 0$)

$$U(x, 0) = \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1 \tag{4.3}$$

Manakala penyelesaian tepat bagi masalah (4.1) dinyatakan sebagai

$$U(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \tag{4.4}$$

Hasil-hasil ujikaji berangka ditunjukkan dalam Jadual 4.1, 4.2 dan 4.3

Jadual 4.1a: Bilangan lelaran dan masa yang diambil (**dalam saat**) untuk :

$$v = 1.0, \Delta x^{-1} = 512, \Delta t = 0.005, T = 0.5$$

KAEDAH	SAPUAN PENUH		SEPARUH SAPUAN		SEPARA SAPUAN (TERUBAHSUAI)	
	Bil. lelar	Masa	Bil. Lelar	Masa	Bil. lelar	Masa
GS	7444	5307.3	2088	754.9	583	126.8
2-KTT	3946	4399.7	1102	624.0	308	97.8
3-KTT	2719	2977.1	759	425.1	213	67.6
4-KTT	2088	3652.6	583	503.0	165	77.5

Jadual 4.1b: Ralat Maksimum untuk : $v = 1.0, \Delta x^{-1} = 512, \Delta t = 0.005, T = 0.5$

KAEDAH	SAPUAN PENUH	SEPARUH SAPUAN	SEPARA SAPUAN (TERUBAHSUAI)
	Ralat maks.	Ralat maks.	Ralat maks.
GS	1.93064E-05	2.05574E-05	2.20715E-05
2-KTT	1.99252E-05	2.07118E-05	2.21091E-05
3-KTT	2.01322E-05	2.07631E-05	2.21219E-05
4-KTT	2.02357E-05	2.07892E-05	2.21282E-05

Jadual 4.2a: Bilangan lelaran dan masa yang diambil (dalam saat) untuk :

$$v = 1.0, \Delta x^{-1} = 256, \Delta t = 0.005, T = 0.5$$

KAEDAH	SAPUAN PENUH		SEPARUH SAPUAN		SEPARA SAPUAN (TERUBAHSUAI)	
	Bil. lelar	Masa	Bil. Lelar	Masa	Bil. lelar	Masa
GS	2088	703.0	583	103.9	166	17.4
2-KTT	1102	594.3	308	84.9	89	13.9
3-KTT	759	404.0	213	58.7	63	10.0
4-KTT	583	486.6	165	70.6	51	11.9

Jadual 4.2b: Ralat Maksimum untuk : $v = 1.0, \Delta x^{-1} = 256, \Delta t = 0.005, T = 0.5$

KAEDAH	SAPUAN PENUH		SEPARUH SAPUAN		SEPARA SAPUAN (TERUBAHSUAI)	
	Ralat maks.		Ralat maks.		Ralat maks.	
GS	2.05573E-05		2.20715E-05		2.73222E-05	
2-KTT	2.07118E-05		2.21092E-05		2.73308E-05	
3-KTT	2.07631E-05		2.21219E-05		2.73335E-05	
4-KTT	2.07891E-05		2.21285E-05		2.73348E-05	

Jadual 4.3a: Bilangan lelaran dan masa yang diambil (dalam saat) untuk :

$$v = 1.0, \Delta x^{-1} = 128, \Delta t = 0.005, T = 0.5$$

KAEDAH	SAPUAN PENUH		SEPARUH SAPUAN		SEPARA SAPUAN (TERUBAHSUAI)	
	Bil. lelar	Masa	Bil. Lelar	Masa	Bil. lelar	Masa
GS	583	97.6	166	14.2	51	2.8
2-KTT	308	81.5	89	12.0	29	2.4
3-KTT	213	56.4	63	8.7	22	1.9
4-KTT	165	68.5	51	10.8	19	2.4

Jadual 4.3b: Ralat Maksimum untuk : $v = 1.0, \Delta x^{-1} = 128, \Delta t = 0.005, T = 0.5$

KAEDAH	SAPUAN PENUH		SEPARUH SAPUAN		SEPARA SAPUAN (TERUBAHSUAI)	
	Ralat maks.		Ralat maks.		Ralat maks.	
GS	2.20691E-05		2.73191E-05		4.85032E-05	
2-KTT	2.51069E-05		2.73276E-05		4.85046E-05	
3-KTT	2.21198E-05		2.73303E-05		4.85050E-05	
4-KTT	2.21261E-05		2.73315E-05		4.85055E-05	

5. Kesimpulan

Melalui pemerhatian hasil ujikaji berangka yang diperolehi pada Jadual 4.1, 4.2 dan 4.3, didapati bahawa ralat maksimum bagi kaedah Gauss-Siedel, KTT dan KTTT adalah hampir sama untuk saiz subsejang x yang berbeza. Walau bagaimanapun kaedah lelaran separa sapuan sama Gauss-Siedel dan KTTT mempunyai kadar penumpuan yang jauh lebih cepat berbanding dengan kaedah lelaran separuh sapuan atau sapuan penuh. Misalnya untuk saiz $\Delta x^{-1} = 512$, bilangan dan masa lelaran yang diambil untuk mencapai penumpuan bagi kaedah lelaran Gauss-Siedel separa sapuan masing-masing adalah 92.17% dan 97.61% kurang daripada bilangan dan masa lelaran yang diperlukan bagi kaedah lelaran Gauss-Siedel sapuan penuh. Hal ini berlaku kerana jumlah kompleksiti pengiraan bagi kaedah lelaran Gauss-Siedel separa sapuan jauh lebih rendah berbanding kaedah lelaran Gauss-Siedel sapuan penuh.

Secara keseluruhannya, kaedah lelaran 3 Titik-KTTT separa sapuan adalah jauh lebih baik dari segi bilangan dan masa lelaran berbanding dengan kaedah lelaran KTT dan KTTT yang lain. Meskipun bilangan lelaran bagi kaedah lelaran 4 Titik-KTTT jauh lebih sedikit daripada kaedah lelaran KTTT yang lain, masa lelarannya lama berbanding kaedah lelaran 3 Titik-KTTT kerana berpunca daripada kerumitan pengiraannya yang tinggi.

Rujukan

- Abdul Rahman Abdullah. 1991. *The Four Point Explicit Decoupled Group (EDG) method. A Fast Poisson Solver*. Int. J. Computer Math. **34**:61-70.
- Abdul Rahman Abdullah dan Arsmah Ibrahim. 1990. *Penyelesaian Masalah Nilai Sempadan Dua Titik Menggunakan Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat (KTT) Dua Titik*. Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik Ke-IV: 73-96.
- Arsmah Ibrahim. *The Study of the Iterative Solution of Boundary Value Problem by the Finite Difference Methods*. Thesis Ph.d. Universiti Kebangsaan Malaysia 1993.
- Jumat Bin Sulaiman. 1998. *Kajian Pelaksanaan Kaedah Multigrid Bagi Persamaan Poisson dan Resapan-Olakan*. Tesis S.TM. Universiti Kebangsaan Malaysia.
- Mohamed Othman & Abdul Rahman Abdullah. 1999. *The Halfsweeps Multigrid Method As A Fast Multigrid Poisson Solver*. Diterima untuk diterbitkan Di Int. J. Computer Mth. **69**:12.
- Yousif, W.S. 1984. *New Block Iterative Methods For The Numerical Solution of Boundary Value Problem*. Thesis Ph.d. Loughborough University of Technology.