ANGGARAN NOMBOR BUKAN NISBAH DALAM BENTUK NOMBOR NISBAH

Rajasegeran Ramasamy

Sekolah Sains dan Teknologi, Universiti Malaysia Sabah
88999, Kota Kinabalu, Sabah, Malaysia

ABSTRACT. *Irrational numbers such as π are always being presented in the form of rational number to make calculation easier. The aim of this paper is to look at the best approximation value in the form of rational number for any irrational number by using continued fraction. The proof of Hurwitz's Theorem is shown in details in this paper. .*

ABSTRAK. *Nombor bukan nisbah seperti π sering diperlihatkan dalam bentuk nombor nisbah bagi memudahkan proses pengiraan. Tujuan kertas kerja ini adalah untuk meneliti anggaran terbaik nombor bukan nisbah dalam bentuk nombor nisbah dengan menggunakan konsep pecahan berlanjar. Pembuktian Teorem Hurwitz telah ditunjukkan dengan terperinci dalam kertas ini.*

KATA KUNCI: Pecahan berlanjar, Anggaran Diophantine, Konvergen

PENGENALAN

Kita pertimbangkan satu garis nombor dengan penyebut q seperti dalam Persamman di bawah:

$$\frac{-3}{q} \qquad \frac{-2}{q} \qquad \frac{-1}{q} \qquad \frac{0}{q} \qquad \frac{1}{q} \qquad \frac{2}{q} \qquad \frac{3}{q}$$

Satu nombor bukan nisbah x boleh terletak di antara mana-mana dua nombor nisbah pada garis nombor di atas, iaitu
$\frac{s}{q} \le x < \frac{s+1}{q}$, dengan s, q integer.

Kita boleh perolehi bahawa $\left| x - \frac{s}{q} \right| < \frac{1}{q}$, malah ketaksamaan ini boleh juga ditulis sebagai $\left| x - \frac{p}{q} \right| \le \frac{1}{2q}$ atau $|qx - p| \le \frac{1}{2}$ dengan p mengambil nilai s atau $s + 1$ mengikut kesesuaian. Ini bermaksud perbezaan anggaran nombor bukan nisbah x dalam bentuk nombor nisbah $\frac{p}{q}$ dengan nombor nisbah x ialah $\frac{1}{2}$. Persoalannya adakah nilai $\frac{1}{2}$ merupakan nilai yang terbaik bagi ketaksamaan ini?

PECAHAN BERLANJAR

Andaikan x nombor bukan nisbah dengan $z_n = [x_n]$ iaitu integer yang terbesar yang tidak melebihi nilai x , maka algoritma Euclidan boleh ditulis begini,

$$x = z_0 + \frac{1}{x_1} \quad ; \quad x_1 > 1 \ , x_1 = z_1 + \frac{1}{x_2} \quad ; \quad x_2 > 1, \ x_2 = z_2 + \frac{1}{x_3} \quad ; \quad x_3 > 1, \ldots$$

Proses ini boleh berterusan tanpa henti atau terhenti dan ini bergantung kepada nilai yang diambil oleh *x.* Walaubagaimanapun memandangkan x nombor bukan nisbah agak jelas bahawa proses ini akan berterusan kerana tidak mungkin wujud satu integer z yang sama dengan *x.* Jika persamaan di atas digabungkan maka kita perolehi

$$x_1 = z_0 + \frac{1}{x_1} = z_0 + \cfrac{1}{z_1 + \cfrac{1}{x_2}} = \ldots = z_0 + \cfrac{1}{z_1 + \cfrac{1}{z_2 + \cfrac{1}{+ \cfrac{}{\cfrac{}{\cfrac{}{z_{k-1} + \cfrac{1}{z_k}}}}}}}.$$

dengan k satu integer positif yang lebih kecil daripada N . Pecahan yang kompleks ini disebut sebagai pecahan berlanjar di mana ianya boleh ditulis

$$x = \{0;\ z_0, z_1, \ldots, z_{k-1},\ + \frac{1}{z_k}\ \}.$$

Contoh

Biar $x = \varepsilon$ = 2.718281…iaitu satu nombor bukan nisbah

$x = 2 + 0.718281\ldots$

$$\frac{1}{0.718281\ldots} = 1.3922127\ldots \qquad = 1 + 0.3922127\ldots$$

$$\frac{1}{0.3922127\ldots} = 2.5496369\ldots \qquad = 2 + 0.5496369\ldots$$

$$\frac{1}{0.5496369\ldots} = 1.8193829\ldots \qquad = 1 + 0.8193829\ldots$$

$$\frac{1}{0.8193829\ldots} = 1.2204306\ldots \qquad = 1 + 0.2204306\ldots$$

dan proses akan berterusan tanpa henti.

x boleh ditulis sebagai,

$$2.718281\ldots = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{0.2204306\ldots}}}}}$$

Jika kita menyingkirkan sebahagian daripada pecahan berlanjar yang berikutnya maka pecahan yang tinggal disebut sebagai konvergen. Konvergen ialah pecahan tunggal yang dihasilkan daripada sebahagian daripada pecahan berlanjar dengan $p, q \in Z$

$$C_0 = z_0 = \frac{p_0}{q_0}, \quad C_1 = z_0 + \frac{1}{z_1} = \frac{p_1}{q_1}, \quad C_2 = z_0 + \cfrac{1}{z_1 + \cfrac{1}{z_2}} = \frac{p_2}{q_2}, \ldots C_k = z_0 + \cfrac{1}{z_1 + \cfrac{}{+ \cfrac{}{\cfrac{}{\cfrac{1}{+\cfrac{1}{z_k}}}}}} = \frac{p_k}{q_k}$$

ANGGARAN NOMBOR BUKAN NISBAH

Jika ketaksamaan dalam pengenalan ditulis sebagai $|qx - p| \le f(q)$, adakah wujud $f(q)$ yang lebih kecil daripada $\frac{1}{2}$?. $f(q)$ yang kecil bermakna anggaran yang diberikan adalah lebih tepat kerana perbezaan dengan nombor nisbah itu lebih hampir kepada sifar. Niven,1963 menyatakan jika x suatu nombor bukan nisbah yang diwakili oleh satu pecahan berlanjar { $z_0; z_1, z_2, z_3, \ldots\}$ dan pecahan berlanjar ini mempunyai konvergen-konvergen $\frac{p_0}{q_0}$, $\frac{p_1}{q_1}$, …, maka had $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$. (Rajasegeran 2005) Ini bermakna perbezaan antara x dengan konvergen ke-n menumpu ke 0 apabila n meningkat tanpa had. Dalam kertas kerja ini kita menggunakan konvergen pecahan berlanjar sebagai asas kajian.

Niven 1963 telah menunjukkan bahawa $f(q)$ dapat diperkecilkan. Hasil yang ditunjukkan jelas lebih baik daripada perolehan Diophantine. ,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Pembuktian bagi korolari ini dapat dirujuk pada [Niven] mukasurat 3.

Le Veque ,1962 menunjukkan bahawa ketaksamaan dapat diperkukuhkan dengan mendarab pemalar kepada q^2

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

maka $\dfrac{p}{q}$ ialah satu konvergen kepada $\dfrac{p_n}{q_n}$ iaitu *x*.

Pembuktian teorem ini dapat dirujuk pada [Le Veque] mukasurat 94

Adakah pemalar 2 merupakan penyelesaian terbaik bagi masalah ini. Hurwitz pada tahun 1891 telah membuktikan bahawa pemalar dapat digantikan dengan nilai yang lebih besar iaitu bermakna *f(q)* lebih hampir kepada sifar.

TEOREM HURWITZ

Daripada hubungan konvergen-konvergen pecahan berlanjar yang berturutan, (Rajasegeran 2005)

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{(n+1)}}{q_n q_{n+1}},$$

$$x - x + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \qquad ,$$

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x \right| = \left| \frac{(-1)^{(n+1)}}{q_n q_{n+1}} \right|,$$

$$\left| \mathrm{x} - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

$$\left| \frac{xq_n - p_n}{q_n} \right| + \left| \frac{xq_{n+1} - p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

$$\frac{q_{n+1}\left|p_n - xq_n\right| + q_n\left|p_{n+1} - xq_{n+1}\right|}{q_n q_{n+1}} = \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

$$\frac{(q_{n+1})^2 (q_n)\left|p_n - xq_n\right| + q_n^{\,2} (q_{n+1})\left|p_{n+1} - xq_{n+1}\right|}{q_n q_{n+1}} = 1,$$

$$\frac{(q_{n+1})^2(\theta_n) + q_n^{\,2}(\theta_{n+1})}{q_n q_{n+1}} = 1,$$

$$\frac{(q_{n+1})^2(\theta_n) + q_n^{\,2}(\theta_{n+1}) - q_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}} = 0.$$

Dengan membahagi persamaan di atas dengan $q_n^{\,2}$,

$$\left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)^2 \theta_n + \theta_{n+1} - \left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right) = 0.$$

Wujud satu persamaan kuadratik,

$$\left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)^2 . \theta_n \quad - \quad \left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right) + \theta_{n+1} \quad = 0$$

dengan $a = \theta_n$, b = -1 dan $c = \theta_{n+1}$

Penyelesaian persamaan ini dengan rumus $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ iaitu

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(\theta_{\mathrm{n}})(\theta_{\mathrm{n+1}})}}{2\theta_n},$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{n}}\theta_{\mathrm{n+1}}}}{2\theta_n} \quad . \qquad (1)$$

Maka

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{n}}\theta_{\mathrm{n+1}}}}{2\theta._n} = \frac{q_{n+1}}{q_n} = z_{\,n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}$$

$$\geq 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}.$$

Dengan penggantian n dengan n -1 pada persamaan(1), maka $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ menjadi $\frac{q_n}{q_{n-1}}$

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{n}}\theta_{\mathrm{n+1}}}}{2\theta_n} \geq 1 + \frac{2\theta_{n-1}}{1 + \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{n-1}}\theta_{\mathrm{n}}}},$$

$$\geq 1 + \frac{2\theta_{n-1}}{1 + \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{n-1}}\theta_{\mathrm{n}}}} \text{ x } \frac{1 - \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{n-1}}\theta_{\mathrm{n}}}}{1 - \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{n-1}}\theta_{\mathrm{n}}}},$$

$$\geq 1 + \frac{1 - \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{.n-1}}\theta_{\mathrm{n}}}}{2\theta_n},$$

$$1 + \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{n}}\theta_{\mathrm{n+1}}} \quad \geq \quad 2\,\theta_n + 1 - \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{n-1}}\theta_{\mathrm{n}}},$$

$$2\,\theta_n \leq \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{n}}\theta_{\mathrm{n+1}}} - \sqrt{1 - 4\,\theta_{\mathrm{n-1}}\theta_{\mathrm{n}}} \; .$$

Dengan definisi $\phi_{\mathrm{n}} = \min\{\ \theta_{n-1}\ , \theta_n\, ,\ \theta_{n+1}\ \}$.

$$2\,\phi_{\mathrm{n}} \leq 2\,\sqrt{1 - 4\phi._n.^2}\,,$$

$$\phi_{\mathrm{n}} \leq \sqrt{1 - 4\phi._n{}^2}\,,$$

$$\phi_{\mathrm{n}}{}^2 \leq 1 - 4\,\phi_n{}^2,$$

$$5\,\phi_{\mathrm{n}}{}^2 \leq 1,$$

$$\phi_{\mathrm{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} = 5^{\,-½}.$$

Daripada definisi θ_n

$$\phi_{\mathrm{n}} = q_n \left| x q_n - p_n \right|,$$

$$= (q_n)^2 \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} = 5^{-½},$$

$$= \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}q_n^{\ 2}} \qquad \blacksquare$$

Jelas dapatan Teorem Hurwitz lebih baik daripada nilai f(q) sebelumnya. Teorem Hurwitz menegaskan bahawa perbezaan anggaran bagi sebarang nombor bukan nisbah dengan nombor nisbah itu adalah kurang atau sama dengan $\frac{1}{\sqrt{5}q_n^{\ 2}}$ yang mana mempunyai bilangan anggaran yang tak terhingga bagi sebarang nombor bukan nisbah. Bolehkah nilai ketaksamaan ini diperbaiki lagi?

Beberapa kajian telah ditunjukkan yang mana dapat menghasilkan nilai yang lebih baik tetapi dapatan-dapatan berikut mengenakan beberapa syarat. A.V. Prasad,1948 telah menyatakan ketaksamaan yang diperolehi oleh Hurwitz dapat diperbaiki iaitu mendapatkan nilai pemalar yang lebih besar iaitu seperti berikut.

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{8}q_n^{\ 2}} \ .$$

Walaubagaiamanapun, Prasad mengenakan syarat iaitu dengan tidak mempertimbangkan nombor bukan nisbah $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ dan nombor-nombor yang setara dengannya maka terdapat bilangan anggaran dalam nombor nisbah yang tak terhingga yang memenuhi ketaksamaanya. Malah jika nombor bukan nisbah $\sqrt{2}$ dan nombor-nombor setara dengannya tidak dipertimbangkan maka penyelesaian ini akan menjadi,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{(q_n)^2 \frac{\sqrt{221}}{5}} \ .$$

Pada tahun 1948, Prasad menyatakan bahawa jika sekurang-kurangnya hanya satu anggaran yang diperlukan bagi sebarang nombor bukan nisbah maka anggaran itu dapat memenuhi ketaksamaan berikut

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{\left(\frac{(3+\sqrt{5})}{2}\right) q_n^{\ 2}} .$$

Dalam kes ini, Prasad mengenakan syarat bahawa bilangan anggaran yang memuaskan ketaksamaan ini tidak lagi tak terhingga.

Pada tahun 1960, L.C. Eggan menyatakan bahawa sekiranya hanya satu anggaran dalam bentuk nisbah diperlukan bagi sebarang nombor nisbah maka ketaksamaan ini boleh diperbaiki iaitu kejituan anggaran dapat diperbaiki. L.C. Eggan menunjukkan wujud satu anggaran bagi sebarang nombor bukan nisbah yang memenuhi ketaksamaan berikut:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{(\frac{3}{2} + \sqrt{2})} \right) q_n^2}.$$

Dalam kes ini, ketaksamaan ini boleh digunapakai bagi sebarang nombor bukan nisbah tetapi kekurangannya ialah mungkin hanya satu anggaran bagi nombor bukan nisbah sahaja dapat memenuhi ketaksamaan ini.

KESIMPULAN

Walaupun kita dapat melihat nilai anggaran yang diberikan oleh Eggan dan Prasad lebih baik daripada yang ditunjukkan oleh Hurwitz. Prasad memperolehi dapatannya dengan tidak mempertimbangkan beberpa nombor bukan nisbah. Dengan tidak mempertimbangkan lebih banyak nombor bukan nisbah maka anggaran yang diperolehinya lebih baik. Manakala Eggan pula mengenakan syarat hanya untuk memperolehi sekurang-kurangnya satu nilai anggaran dan juga tidak mempertimbangkan beberapa nombor bukan nisbah maka dapatanya lebih baik daripada yang ditunjukkan dalam Teorem Hurwitz. Persoalannya adakah dapat digunapakai untuk sebarang nombor bukan nisbah bagi menghasilkan bilangan anggaran dalam bentuk nombor nisbah yang tidak terhingga. Cuba kita teliti teorem Hurwitz semula.

Jika { $z_0, z_1, z_2, ..., z_k$ }ialah pecahan berlanjar bagi satu nombor nyata x dan $\frac{p_n}{q_n}$ ialah konvergen ke *n* bagi pecahan berangkai ini. θ_n didefinisikan sebagai

$$\theta_n = q_n \left| xq_n - p_n \right|,$$

maka $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5} q_n^2}$.

Jelas sehingga kini, Teorem Hurwitz merupakan dapatan yang digunakan untuk sebarang nombor bukan nisbah bagi memperolehi bilangan anggaran nombor nombor bukan nisbah dalam bentuk nombor nisbah.

RUJUKAN

Chong, K.Y., Daykin, D.E., Rathbone, C.R. (1971). Rational Approximations to π. *Mathematics of Computation,* **25** (114): 387-391.

Eggan, L.C. (1961). On Diophantine Approximations. *Am. Maths. Soc,*. **17**:102-116

LeVeque, W. J. (1962). *Elementary Theory of Numbers*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Moore, C.G. (1964). *An Introduction To Continued Fractions*. N.W., Washington: National Council of Teachers of Mathematics.

Niven, I. (1963). *Diophantine Approximations*. London: Interscience

Rajasegeran Ramasamy. (2005). *Anggaran Diophantine Dengan Pecahan Berlanjar.* Disertasi M.Sc. Universiti Sains Malaysia. (Tidak diterbitkan)

Tornheim, L. (1955). Approximation to Irrationals by classes of Rational Numbers. *Am. Maths. Soc,.* **6**(2): 260-264.