

## KAEDAH LELARAN KUMPULAN TAK TERSIRAT KE ATAS KAEDAH UNSUR TERHINGGA SEGI EMPAT BAGI PERSAMAAN POISSON DUA MATRA

Jumat Sulaiman<sup>1</sup> & Abdul Rahman Abdullah<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Sekolah Sains & Teknologi,  
Universiti Malaysia Sabah, 88999 Kota Kinabalu, Sabah, Malaysia

<sup>2</sup>Fakulti Teknologi & Sains Maklumat,  
Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 Bangi, Selangor, Malaysia

**ABSTRAK.** Kertas ini bertujuan memperihalkan perumusan skema kaedah lelaran 2, 4 dan 6 Titik Kumpulan Tak Tersirat (KTT) dengan menggunakan penghampiran unsur terhingga yang diperolehi berasaskan unsur segi empat tepat bagi menyelesaikan persamaan Poisson dua matra.

**KATAKUNCI.** Persamaan Poisson, lelaran blok Kumpulan Tak Tersirat, unsur segi empat

**ABSTRACT.** The aim of this paper is to describe the formulation of the 2, 4 and 6 Point Explicit Group (EG) iterative methods scheme with finite element approximation, which is obtained based on rectangular element to solve the two dimensional Poisson's equation.

**KEYWORDS.** Poisson's equation, Explicit Group block iterative, rectangular element

### PENGENALAN

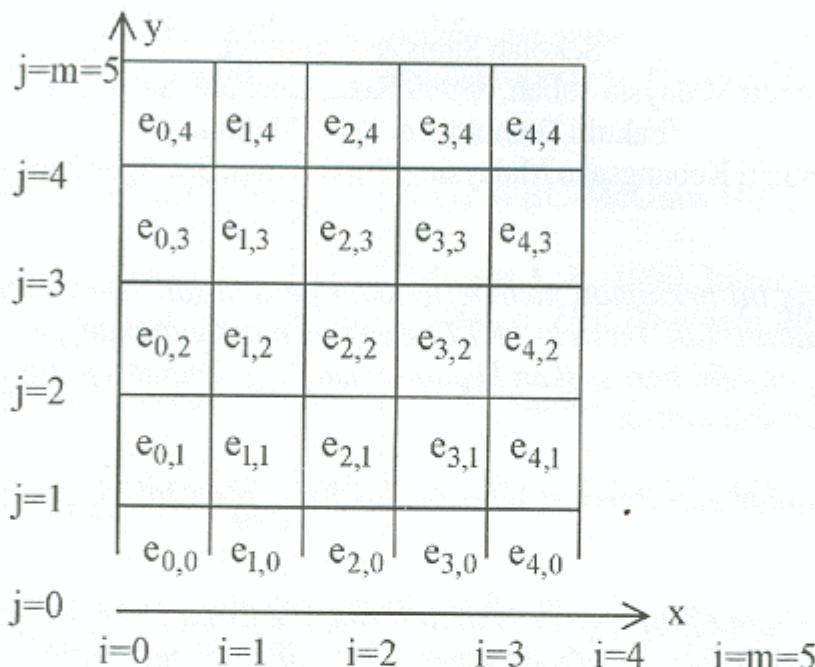
Pertimbangkan persamaan Poisson dua matra yang didiskretkan dalam bentuk persamaan penghampiran unsur terhingga. Persamaan ini sering dikaitkan dalam memperihalkan fenomena pemindahan haba yang ditakrifkan sebagai

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y), \text{ untuk } (x, y) \in D = [a, b] \times [a, b] \quad (1)$$

tertakluk kepada syarat-syarat sempadan

$$\left. \begin{array}{l} U(x, a) = g_1(x) \\ U(x, b) = g_2(x) \end{array} \right\} \text{untuk } a \leq x \leq b,$$
$$\left. \begin{array}{l} U(a, y) = g_3(y) \\ U(b, y) = g_4(y) \end{array} \right\} \text{untuk } a \leq y \leq b,$$

Sementara itu  $U(x, y)$  adalah nilai yang memperihalkan suhu pada sebarang titik  $(x, y) \in D$  dalam keadan mantap. Bagi memudahkan untuk memperolehi persamaan penghampiran unsur terhingga bagi masalah (1), selang dalam arah  $x$  dan  $y$  perlu dipartisikan secara seragam kepada beberapa subselang yang membentuk beberapa segmen unsur terhingga seperti ditunjukkan pada Rajah 1.



Rajah 1. Rangkaian dan kedudukan unsur segi empat sama  $e_{i,j}$ , untuk  $i, j = 0, 1, \dots, m-1$  bagi  $m = 5$  dalam domain penyelesaian (1).

Kertas ini hanya membincangkan fungsi  $U(x, y)$  yang dihampiri oleh fungsi interpolasi pada sebarang unsur segi empat sama  $e_{i,j}$  yang ditunjukkan pada Rajah 1 diberikan oleh

$$U_{e_{i,j}}(x, y) = N_1(x, y)U_{i,j} + N_2(x, y)U_{i+1,j} + N_3(x, y)U_{i+1,j+1} + N_4(x, y)U_{i,j+1} \quad (2)$$

dengan

$$h = x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j,$$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{h^2}(x - x_{i+1})(y - y_{j+1}), \quad N_2(x, y) = \frac{-1}{h^2}(x - x_i)(y - y_{j+1}),$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{h^2}(x - x_i)(y - y_j), \quad N_4(x, y) = \frac{-1}{h^2}(x - x_{i+1})(y - y_j).$$

Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat ke atas Kaedah Unsur Terhingga Segi empat bagi persamaan Posson dua-matra.

Secara umumnya fungsi bentuk unsur segi empat,  $N_k(x, y)$ , untuk  $k = 1, 2, 3, 4$  boleh dinyatakan semula sebagai

$$N_k(x, y) = \frac{a_k}{h^2} (x - b_k)(y - c_k), \text{ untuk } k = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

yang,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ x_i \\ x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{j+1} \\ y_{j+1} \\ y_j \\ y_j \end{bmatrix}.$$

Maka terbitan  $N_k(x, y)$  terhadap  $x$  dan  $y$  diberikan oleh

$$\frac{\partial N_k}{\partial x} = \frac{a_k}{h^2} (y - c_k) \quad (4)$$

dan

$$\frac{\partial N_k}{\partial y} = \frac{a_k}{h^2} (x - b_k). \quad (5)$$

### PERUMUSAN MOLEKUL PENGIRAAN SEMBILAN TITIK UNSUR SEGI EMPAT

Pertimbangkan penggunaan pendekatan fungsi atap (Lewis & Ward, 1991) untuk mendapatkan perumusan persamaan penghampiran bagi persamaan (1). Perhatikan pada Rajah 1, terdapat beberapa unsur terhingga yang dibentuk pada domain penyelesaian. Oleh itu, fungsi  $U(x, y)$  dihampiri pada domain tersebut oleh

$$U(x, y) = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^m R_{p,q}(x, y) U_{p,q}. \quad (6)$$

Dengan berpandukan pada rangkaian unsur segi empat pada Rajah 1, penakrifan fungsi atap  $R_{p,q}(x, y)$  ke atas fungsi bentuk  $N_k(x, y)$  dapat diperihalkan dengan mudah seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 1.

Seterusnya kertas ini hanya mempertimbangkan kaedah reja Galerkin yang ditakrifkan sebagai

$$\iint_D R_{i,j}(x,y)E(x,y) dx dy = 0, \text{ untuk } i,j=0,1,2,\dots,m \quad (7)$$

dengan  $E(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - f(x,y)$  adalah fungsi reja. Dengan menggunakan teorem Green pada satah dan syarat-syarat sempadan bagi persamaan (1), persamaan (7) boleh dituliskan sebagai

$$\iint_{a a}^{b b} \frac{\partial R_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial R_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} dx dy = F_{i,j} \quad (8)$$

yang mana,

$$F_{i,j} = - \iint_{a a}^{b b} R_{i,j}(x,y) f(x,y) dx dy.$$

Berpandukan pada Rajah 1 dan pertimbangkan persamaan (4) dan (5), terbitan  $U(x,y)$  masing-masing terhadap  $x$  dan  $y$  diberikan oleh

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^m \frac{\partial R_{p,q}}{\partial x} U_{p,q} \quad (9)$$

dan

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^m \frac{\partial R_{p,q}}{\partial y} U_{p,q}. \quad (10)$$

Dengan menggantikan persamaan (9) dan (10) ke atas (11), boleh diperolehi

$$\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^m A_{i,j,p,q} U_{p,q} = F_{i,j}, \text{ untuk } i,j=0,1,2,\dots,m \quad (11)$$

yang,

$$A_{i,j,p,q} = \iint_{a a}^{b b} \frac{\partial R_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial R_{p,q}}{\partial x} dx dy + \iint_{a a}^{b b} \frac{\partial R_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial R_{p,q}}{\partial y} dx dy.$$

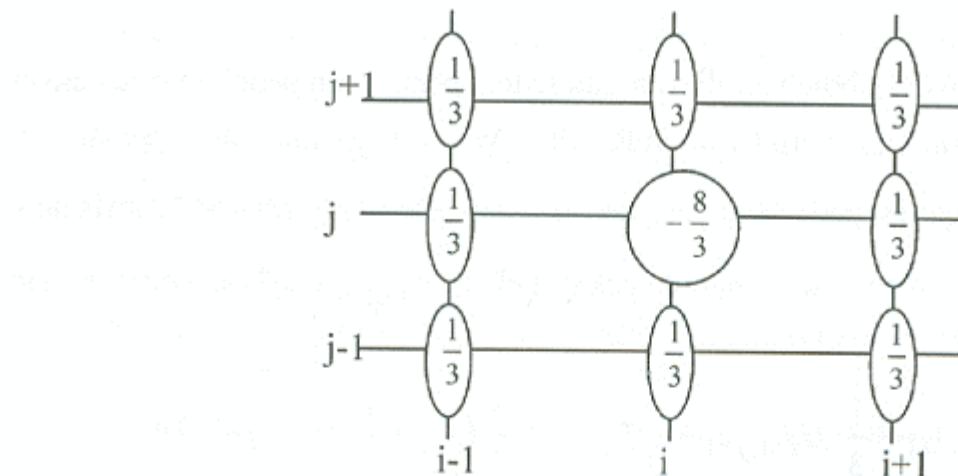
Daripada persamaan (11), boleh dituliskan satu sistem persamaan penghampiran unsur terhingga linear  $((m+1)x(m+1))$  berpandukan Rajah 1. Walau bagaimanapun persamaan penghampiran unsur terhingga (11) pada  $U_{i,j}$  yang tak diketahui boleh diungkapkan dalam bentuk lebih ringkas dengan menentukan terlebih dahulu pekali-pekali  $A_{i,j,p,q}$  dan boleh ditunjukkan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} U_{i-1,j+1} + \frac{1}{3} U_{i,j+1} + \frac{1}{3} U_{i+1,j+1} + \frac{1}{3} U_{i-1,j} - \frac{8}{3} U_{i,j} + \frac{1}{3} U_{i+1,j} + \\ \frac{1}{3} U_{i-1,j-1} + \frac{1}{3} U_{i,j-1} + \frac{1}{3} U_{i+1,j-1} = F_{i,j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Sementara itu, molekul pengiraan bagi persamaan penghampiran unsur terhingga (12) yang berasaskan penghampiran polinomial peringkat ketiga (Fagan, 1992) ditunjukkan pada Rajah 2.

**Jadual 1. Penakrifan fungsi atap  $R_{p,q}(x, y)$  ke atas fungsi bentuk  $N_k(x, y)$  dalam kes  $m = 3$**

Unsur	$R_{0,0}$	$R_{1,0}$	$R_{2,0}$	$R_{3,0}$	$R_{0,1}$	$R_{1,1}$	$R_{2,1}$	$R_{3,1}$	$R_{0,2}$	$R_{1,2}$	$R_{2,2}$	$R_{3,2}$	$R_{0,3}$	$R_{1,3}$	$R_{2,3}$	$R_{3,3}$
$e_{0,0}$	$N_1$	$N_2$	0	0	$N_4$	$N_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{1,0}$	0	$N_1$	$N_2$	0	0	$N_4$	$N_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{2,0}$	0	0	$N_1$	$N_2$	0	0	$N_4$	$N_3$	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{0,1}$	0	0	0	0	$N_1$	$N_2$	0	0	$N_4$	$N_3$	0	0	0	0	0	0
$e_{1,1}$	0	0	0	0	0	$N_1$	$N_2$	0	0	$N_4$	$N_3$	0	0	0	0	0
$e_{2,1}$	0	0	0	0	0	0	$N_1$	$N_2$	0	0	$N_4$	$N_3$	0	0	0	0
$e_{0,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$N_1$	$N_2$	0	0	$N_4$	$N_3$	0	0
$e_{1,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$N_1$	$N_2$	0	0	$N_4$	$N_3$	0
$e_{2,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$N_1$	$N_2$	0	0	$N_4$	$N_3$



**Rajah 2. Molekul pengiraan 9 titik unsur segi empat sama.**

## KAEDAH LELARAN KUMPULAN TAK TERSIRAT

Kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat (KTT) dikategorikan sebagai kaedah lelaran blok yang mempertimbangkan sekumpulan titik berdekatan dan diselesaikan secara serentak. Dalam usaha mengaplikasikan skema kaedah lelaran blok yang telah dirumuskan ke atas kaedah beza terhingga oleh Yousif (1984), Arsmah (1993), Jumat dan Abdul Rahman (1998; 1999) serta Jumat *et al.* (1998), maka dalam kertas ini, hanya diberikan kaedah lelaran 2, 4 dan 6 Titik-KTT yang dirumuskan berdasarkan pada persamaan penghampiran (12). Sementara kaedah lelaran Gauss-Seidel (GS) ke atas persamaan tersebut juga dilaksanakan dan bertindak sebagai kaedah lelaran piawai.

### Perumusan 2 Titik-KTT

Berpandukan pada Rajah 2 dan pertimbangkan untuk sebarang 2 titik berturutan ke atas persamaan (12), perumusan kaedah lelaran 2 Titik-KTT membabitkan sistem persamaan linear (2x2) yang secara umumnya dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,j} \\ U_{i+1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

yang,

$$\begin{aligned} S_1 &= U_{i-1,j+1} + U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j-1} + U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j} - 3F_{i,j}, \\ S_2 &= U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1} + U_{i+2,j+1} + U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i+2,j-1} + U_{i+2,j} - 3F_{i+1,j}. \end{aligned}$$

Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat ke atas Kaedah Unsur Terhingga Segi empat bagi persamaan Possson dua-matra.

Dengan menyelesaikan sistem persamaan (13), boleh ditunjukkan skema lelaran 2 Titik-KTT dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j} \\ U_{i+1,j} \end{bmatrix} = \frac{1}{63} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

## Perumusan 4 Titik-KTT

Pertimbangkan sekumpulan 4 titik berdekatan yang menjanakan sistem persamaan linear (4x4), boleh dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,j} \\ U_{i+1,j} \\ U_{i,j+1} \\ U_{i+1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

yang,

$$\begin{aligned} S_1 &= U_{i-1,j-1} + U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j} - 3F_{i,j}, \\ S_2 &= U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i+2,j-1} + U_{i+2,j+1} + U_{i+2,j} - 3F_{i+1,j}, \\ S_3 &= U_{i-1,j+2} + U_{i,j+2} + U_{i+1,j+2} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j} - 3F_{i,j+1}, \\ S_4 &= U_{i,j+2} + U_{i+1,j+2} + U_{i+2,j+2} + U_{i+2,j+1} + U_{i+2,j} - 3F_{i+1,j+1}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teknik pengurangan kekompleksan pengiraan yang telah dibincangkan oleh Jumat dan Abdul Rahman (1998; 1999) serta Jumat *et al.* (1998) ke atas sistem persamaan (15), boleh dinyatakan skema lelaran 4 Titik-KTT sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j} \\ U_{i+1,j} \\ U_{i,j+1} \\ U_{i+1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_a + (S_1/9) \\ S_a + (S_2/9) \\ S_a + (S_3/9) \\ S_a + (S_4/9) \end{bmatrix} \quad (16)$$

dengan  $S_a = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)/45$ .

## Perumusan 6 Titik-KTT

Melalui langkah-langkah dan teknik pengurangan kekompleksan serupa yang dibincangkan dalam perumusan 2 dan 4 Titik-KTT, boleh ditunjukkan bahawa skema lelaran 6 Titik-KTT diungkapkan sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j} \\ U_{i+1,j} \\ U_{i+2,j} \\ U_{i+1,j+1} \\ U_{i+1,j+1} \\ U_{i+2,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_a + (S_1/9) \\ S_b + (S_2/9) \\ S_c + (S_3/9) \\ S_a + (S_4/9) \\ S_b + (S_5/9) \\ S_c + (S_6/9) \end{bmatrix} \quad (17)$$

yang,

$$\begin{aligned} S_1 &= U_{i-1,j-1} + U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j} - 3F_{i,j}, \\ S_2 &= U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i+2,j-1} - 3F_{i+1,j}, \\ S_3 &= U_{i+1,j-1} + U_{i+2,j-1} + U_{i+3,j-1} + U_{i+3,j} + U_{i+3,j+1} - 3F_{i+2,j}, \\ S_4 &= U_{i-1,j+2} + U_{i,j+2} + U_{i+1,j+2} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j} - 3F_{i,j+1}, \\ S_5 &= U_{i,j+2} + U_{i+1,j+2} + U_{i+2,j+2} - 3F_{i+1,j+1}, \\ S_6 &= U_{i+1,j+2} + U_{i+2,j+2} + U_{i+3,j+2} + U_{i+3,j+1} + U_{i+3,j} - 3F_{i+2,j+1}, \end{aligned}$$

$$\beta_1 = S_1 + S_4, \quad \beta_2 = S_2 + S_5, \quad \beta_3 = S_3 + S_6,$$

$$S_a = (59\beta_1 + 63\beta_2 + 18\beta_3)/2583,$$

$$S_b = (63\beta_1 + 77\beta_2 + 63\beta_3)/2583,$$

$$S_c = (18\beta_1 + 63\beta_2 + 59\beta_3)/2583.$$

## UJIKAJI BERANGKA

Pelaksanaan ujikaji berangka bagi memperihalkan kecekapan beberapa skema kaedah lelaran KTT telah dilakukan ke atas sistem persamaan penghampiran unsur terhingga linear yang diperolehi menerusi pendiskretan persamaan Poisson dua matra yang dinyatakan seperti berikut;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left( x^2 + y^2 \right) e^{xy}, \text{ untuk } (x, y) \in D = [0,1] \times [0,1] \quad (18)$$

Manakala penyelesaian hampiran yang diperolehi pula dibandingkan dengan penyelesaian tepat bagi masalah (18) yang diberikan sebagai

$$U(x, y) = e^{xy}, \text{ untuk } 0 \leq x, y \leq 1. \quad (19)$$

Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat ke atas Kaedah Unsur Terhingga Segi empat bagi persamaan Posson dua-matra.

Semua keputusan ujikaji berangka yang diperolehi daripada pelaksanaan kaedah lelaran GS dan KTT ditunjukkan dalam Jadual 2, 3 dan 4. Dalam pelaksanaan ujikaji tersebut, ujian penumpuan menggunakan nilai ralat toleransi  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

## KESIMPULAN

Hasil pemerhatian ujikaji berangka yang ditunjukkan pada Jadual 2, 3 dan 4, didapati bahawa semua skema kaedah lelaran KTT adalah jauh lebih baik dari segi bilangan dan masa lelaran yang diperlukan untuk mencapai penumpuan berbanding dengan kaedah lelaran GS sama ada kes  $m = 8, 16$  dan  $32$ . Walau bagaimanapun untuk sebarang nilai  $m$  tersebut, kaedah lelaran 6 Titik-KTT pula adalah lebih baik daripada kaedah lelaran GS dan KTT yang lain. Misalnya pada bilangan selang  $m = 32$ , pengurangan sebanyak  $36.40\%$  dan  $35.85\%$  masing-masing pada bilangan dan masa lelaran jika dibandingkan dengan kaedah lelaran 2 Titik-KTT. Keputusan ini juga setara dengan keputusan kajian lelaran blok yang dilakukan oleh Jumat dan Abdul Rahman (1998; 1999) serta Jumat *et al.* (1998).

**Jadual 2. Perbandingan bilangan lelaran**

Kaedah Lelaran	Bilangan selang m		
	8	16	32
GS	97	364	1355
2-KTT	86	320	1195
4-KTT	65	235	869
6-KTT	57	205	760

**Jadual 3. Perbandingan masa lelaran dalam saat**

Kaedah Lelaran	Bilangan selang m		
	8	16	32
GS	1.15	5.22	34.66
2-KTT	0.99	4.56	32.02
4-KTT	0.77	3.35	21.97
6-KTT	0.65	2.91	20.54

Kaedah Lelaran	Bilangan selang m		
	8	16	32
GS	8.6150 E-04	2.1286 E-04	5.3121 E-05
2-KTT	8.6150 E-04	2.1286 E-04	5.3122 E-05
4-KTT	8.6150 E-04	2.1286 E-04	5.3123 E-05
6-KTT	8.6150 E-04	2.1286 E-04	5.3124 E-05

**Jadual 4. Perbandingan ralat maksimum****RUJUKAN**

- Arsmah Ibrahim, 1993. *The Study of the Iterative Solution Of Boundary Value Problem by the Finite Difference Methods*. Ph.D Thesis. Universiti Kebangsaan Malaysia.
- Fagan, M. J. 1992. *Finite Element Analysis: Theory and Practise*. Singapore: Longman Singapore Publishers (Pte) Ltd.
- Jumat Bin Sulaiman dan Abdul Rahman Bin Abdullah, 1998. Kaedah lelaran kumpulan tak tersirat dengan penghampiran beza terhingga peringkat tinggi bagi persamaan Poisson. *Matematika*, **14**: 27-37.
- Jumat Sulaiman, Mohamed Othman dan Abdul Rahman Abdullah, 1998. Skema kaedah lelaran kumpulan tak tersirat terubahsuai bagi persamaan resapan satu matra. *Borneo Science*, **4**:57-66.
- Jumat Bin Sulaiman dan Abdul Rahman Bin Abdullah, 1999. Beberapa kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat Nyah-Pasangan dengan separuh sapuan multigrid bagi persamaan Poisson. *Sains Malaysiana*, **28**:161-172.
- Lewis, P.E. and Ward, J.P. 1991. *The Finite Element Method: Principles and Application*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.
- Yousif, W.S. 1984. *New Block Iterative Methods For The Numerical Solution of Boundary Value Problem*. Ph.D Thesis. Loughborough University of Technology.