

# Kaedah Lelaran Sapuan Penuh Kumpulan Tak Tersirat Menggunakan Persamaan Unsur Terhingga Segi Tiga Bagi Menyelesaikan Persamaan Poisson Dua Matra

**Jumat Sulaiman<sup>1</sup> & Abdul Rahman Abdullah<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Sekolah Sains & Teknologi, Universiti Malaysia Sabah,  
Beg Berkunci 2073, 88999 Kota Kinabalu, Sabah.

<sup>2</sup>Multi Media Synergy Corporation Berhad, Level 3 Incubator 3,  
Technology Park Malaysia, 57000 Kuala Lumpur.

**ABSTRAK.** Kertas kerja ini bertujuan untuk memperihalkan perumusan skema kaedah lelaran 2 dan 4 Titik Kumpulan Tak Tersirat (KTT) dengan menggunakan persamaan penghampiran unsur segi tiga bagi menyelesaikan persamaan Poisson dua matra. Beberapa uji kaji berangka dilaksanakan untuk memperlihatkan kecekapan pengiraan kaedah lelaran KTT.

**KATAKUNCI.** Persamaan Poisson, kaedah lelaran kumpulan tak tersirat, unsur segi tiga.

**ABSTRACT.** The aim of this paper is to describe the formulation of the 2 and 4 Point Explicit Group (EG) iterative methods scheme by using the triangle element approximation equation to solve the two dimensional Poisson's equation. Finally, some numerical tests are implemented to show the computational efficiency of the EG iterative method.

**KEYWORDS.** Poisson's equation, explicit group iterative method, triangle element.

## PENGENALAN

Pertimbangkan persamaan Poisson dua matra yang didiskretkan dalam bentuk rangkaian unsur segi tiga. Persamaan ini sering dikaitkan untuk memperihalkan fenomena pemindahan haba yang ditakrifkan sebagai

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in D = [a, b] \times [a, b] \quad (1)$$

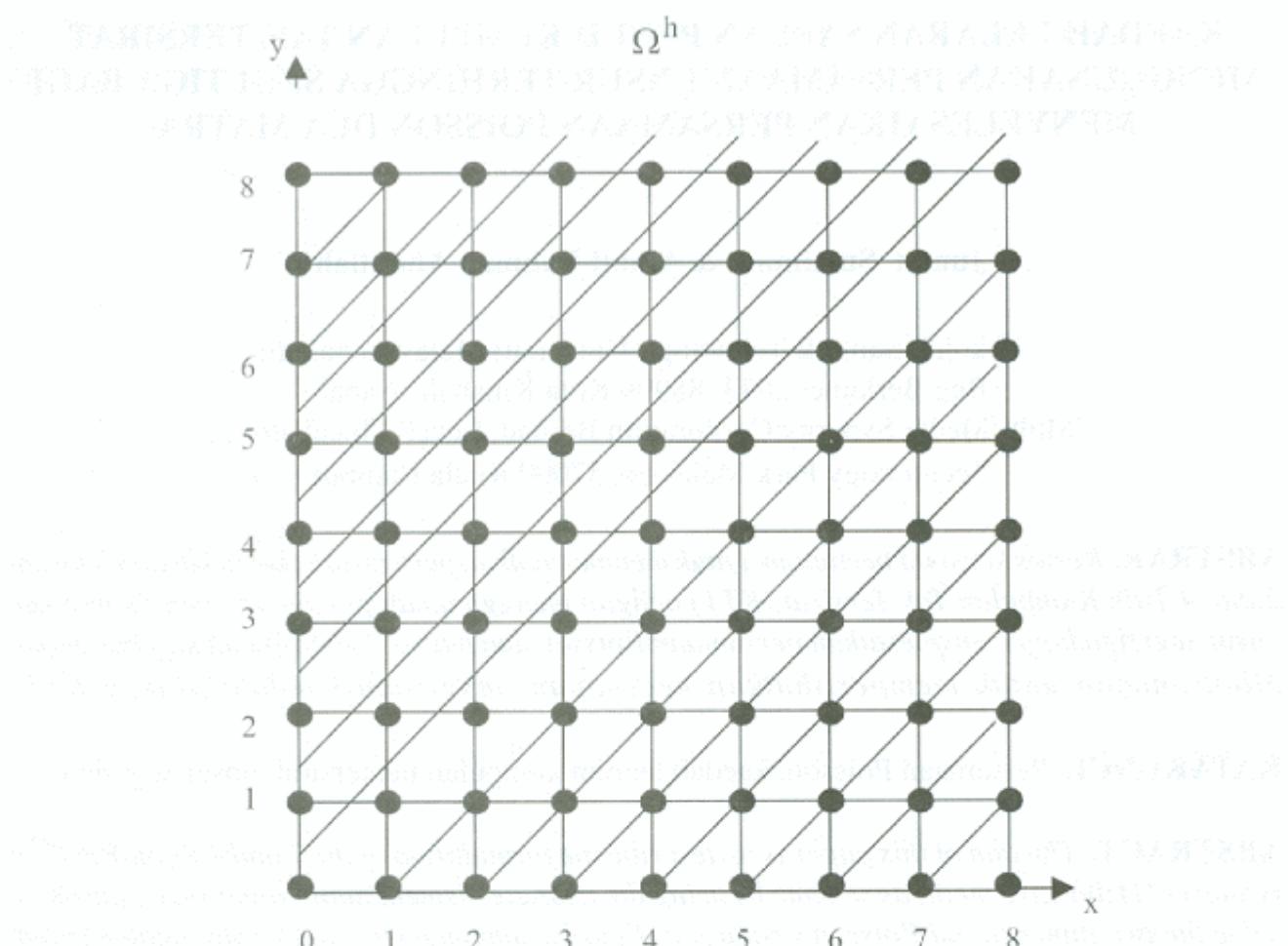
tertakluk kepada syarat-syarat sempadan

$$U(x, a) = g_1(x)$$

$$U(x, b) = g_2(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$U(a, y) = g_3(y)$$

$$U(b, y) = g_4(y), \quad a \leq y \leq b$$



**Rajah 1. Taburan titik-titik nod seragam yang membentuk rangkaian unsur segi tiga pada domain penyelesaian [4.2.1] untuk  $n = 7$ .**

Dalam kertas kerja ini, perbincangan selanjutnya dihadkan untuk kes jarak subselang yang seragam dalam arah  $x$  dan  $y$  dan ditandakan masing-masing sebagai  $\Delta x$  dan  $\Delta y$ . Andaikan selang dalam arah  $x$  dan  $y$  dipartisikan kepada  $(n+1)$  subselang, maka jarak subselangnya diberikan oleh

$$\Delta x = \Delta y = h = \frac{(b-a)}{(n+1)}, \quad m = n+1 \quad (2)$$

Dengan pempartision yang seragam ini, kedudukan taburan titik-titik nod membentuk rangkaian unsur segi tiga pada domain penyelesaian seperti yang ditunjukkan pada Rajah 1. Dengan itu, penghampiran fungsi interpolasi bagi sebarang unsur segi tiga,  $e$  yang dibentuk daripada tiga titik, iaitu titik  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  dan  $(x_3, y_3)$  dapat dinyatakan sebagai

$$U^e(x, y) = N_1(x, y)U_1 + N_2(x, y)U_2 + N_3(x, y)U_3 \quad (3)$$

dengan fungsi bentuk unsurnya,  $N_k(x, y), k = 1, 2, 3$  pula dinyatakan oleh

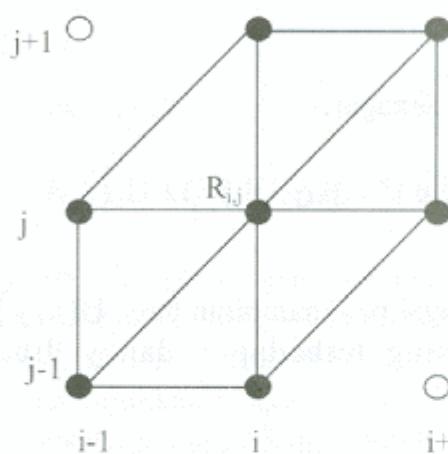
$$N_k(x, y) = \frac{1}{A} (a_k + b_k x + c_k y), \quad k = 1, 2, 3 \quad (4)$$

yang,  $|A| = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

Manakala, terbitan separa tertib pertama bagi fungsi bentuk tersebut masing-masing terhadap x dan y boleh diberikan oleh

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (N_k(x, y)) &= \frac{b_k}{|A|}, \\ \frac{\partial}{\partial y} (N_k(x, y)) &= \frac{c_k}{|A|}, \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3 \quad (5)$$



**Rajah 2. Penakrifian domain bagi fungsi topi,  $R_{i,j}(x, y)$  untuk kes unsur segi tiga**

Seterusnya, berpandukan taburan kejiraninan fungsi topi,  $R_{r,s}(x, y)$  pada Rajah 2, penghampiran fungsi  $U(x, y)$  dan  $f(x, y)$  pada keseluruhan domain penyelesaian (1) masing-masing diberikan oleh

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^m R_{r,s}(x, y) U_{r,s} \\ f(x, y) &= \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^m R_{r,s}(x, y) f_{r,s} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

### PERSAMAAN PENGHAMPIRAN UNSUR TERHINGGA LIMA TITIK

Untuk memperolehi perumusan persamaan penghampiran unsur terhingga lima titik, perbincangan seterusnya dihadkan kepada penggunaan perumusan kaedah unsur terhingga Galerkin ke atas masalah (1) yang ditakrifkan sebagai

$$\iint_D R_{i,j}(x, y) E(x, y) dx dy = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

dengan  $E(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - f(x, y)$  adalah fungsi reja. Dengan menggunakan teorem Green pada satrah, persamaan (7) boleh dituliskan dalam bentuk

$$\oint_{\lambda} -R_{i,j}(x,y) \frac{\partial U}{\partial y} dx + R_{i,j}(x,y) \frac{\partial U}{\partial x} dy = \iint_{a a}^b \frac{\partial R_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial R_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} dxdy = F_{i,j} \quad (8)$$

yang,

$$F_{i,j} = \iint_{a a}^b R_{i,j}(x,y) f(x,y) dxdy$$

Dengan menggantikan syarat-syarat sempadan Dirichlet pada persamaan (8), sebutan kamiran pertama bagi persamaan tersebut boleh dituliskan sebagai

$$\oint_{\lambda} -R_{i,j}(x,y) \frac{\partial U}{\partial y} dx + R_{i,j}(x,y) \frac{\partial U}{\partial x} dy = 0 \quad (9)$$

Maka, persamaan (8) boleh diungkapkan semula sebagai

$$-\iint_{a a}^b \frac{\partial R_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (U(x,y)) + \frac{\partial R_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (U(x,y)) dxdy = F_{i,j} \quad (10)$$

dengan  $U(x,y)$  pada persamaan (6) adalah fungsi penghampiran bagi  $U(x,y)$ . Sementara itu, terbitan fungsi tersebut masing-masing terhadap  $x$  dan  $y$  diberikan oleh

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (U(x,y)) &= \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^m \frac{\partial}{\partial x} (R_{r,s}(x,y)) U_{r,s} \\ \frac{\partial}{\partial y} (U(x,y)) &= \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^m \frac{\partial}{\partial y} (R_{r,s}(x,y)) U_{r,s} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Dengan menggantikan persamaan (6) dan (11) ke atas persamaan (10), hasilnya adalah suatu sistem persamaan linear dan bentuk stensilnya pula dinyatakan sebagai

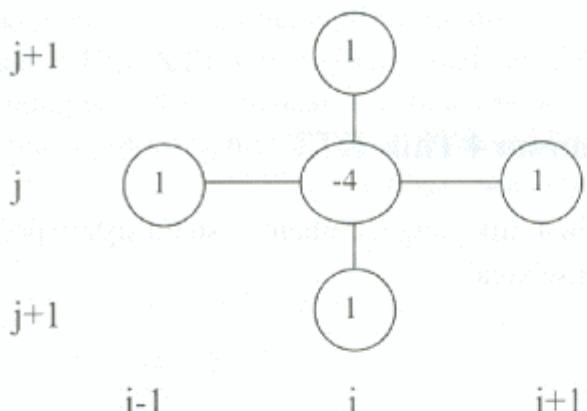
$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} U_{i,j} = \frac{h^2}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & \end{bmatrix} f_{i,j} \quad (12)$$

atau, boleh dinyatakan semula dalam bentuk persamaan penghampiran unsur terhingga lima titik sebagai (lihat Zienkiewicz (1975), Twizell (1984), Fletcher (1984))  
 $U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} - 4U_{i,j} = b_{i,j}^\alpha \quad (13)$

yang,  $b_{i,j}^\alpha = \frac{h^2}{12} (f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i-1,j-1} + f_{i+1,j+1} + 6f_{i,j})$

Sementara molekul pengiraan bagi persamaan (13) adalah berdasarkan interpolasi polinomial tertib pertama seperti yang ditunjukkan pada Rajah 3. Berpandukan pada penakrifan fungsi topi,  $R_{i,j}(x,y)$  yang ditunjukkan oleh Rajah 2, hakikatnya molekul pengiraan pada Rajah 3 membabitkan tujuh titik dalam perumusan persamaan penghampirannya. Misalnya, Evans (1973) telah membangunkan molekul pengiraan tujuh titik sapuan penuh bagi perumusan persamaan penghampiran unsur segi tiga dalam masalah yang sama menggunakan pendekatan kaedah perubahan Ritz. Walau bagaimanapun, dua pekali bagi persamaan (13) adalah sifar,

maka bentuk molekul pengiraan tersebut adalah setara sepertimana molekul pengiraan bagi persamaan penghampiran beza terhingga lima titik sapuan penuh, lihat Abdullah (1991), Jumat dan Abdul Rahman (1996, 1999), Othman dan Abdullah (2000).



Rajah 3. Molekul pengiraan lima titik kes unsur segi tiga sapuan penuh bagi masalah (1).

## KAEDAH LELARAN KUMPULAN TAK TERSIRAT

Pada 1982, Evans dan Biggins telah memperkenalkan skema kaedah lelaran 4 Titik-KTT untuk menyelesaikan masalah (1). Seterusnya, kaedah KTT ini telah diperluaskan kepada kumpulan 2, 4, 9, 16 dan 25 titik oleh Yousif dan Evans (1986). Lanjutan itu, Evans dan Yousif (1986) telah menunjukkan pengaplikasian kaedah lelaran 8 Titik-KTT untuk menyelesaikan persamaan Laplace tiga matra. Empat tahun kemudian, mereka telah melakukan kajian ke atas kaedah lelaran 2, 4 dan 9 Titik-KTT dengan multigrid sapuan penuh (Evans & Yousif 1990).

Di sini, kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat (KTT) dapat dikategorikan sebagai kaedah lelaran blok yang mempertimbangkan sekumpulan titik berdekatan dan diselesaikan secara serentak. Dalam usaha mengaplikasikan skema kaedah lelaran KTT yang telah dirumuskan ke atas kaedah beza terhingga oleh Evans dan Biggins (1982), Yousif (1984), Evans dan Yousif (1990), Arsmah (1993), Jumat dan Abdul Rahman (1998, 1999) serta Jumat et al. (1998), perumusan dalam kertas kerja ini hanya membincangkan kaedah lelaran 2 dan 4 Titik-KTT yang diasaskan daripada persamaan penghampiran (13). Sementara kaedah lelaran Gauss-Seidel (GS) ke atas persamaan tersebut juga dilaksanakan dan bertindak sebagai kaedah lelaran piawai.

### A. Perumusan 2 Titik-KTT

Berpandukan semula pada Rajah 3 dan pertimbangkan untuk sebarang 2 titik berturutan ke atas persamaan (13), perumusan kaedah lelaran 2 Titik-KTT membabitkan sistem persamaan linear ( $2 \times 2$ ) yang secara umumnya dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,j} \\ U_{i+1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

yang,

$$S_1 = U_{i-1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} - b_{i,j}^\alpha, \quad S_2 = U_{i+2,j} + U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j+1} - b_{i+1,j}^\alpha$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan (14), skema lelaran 2 Titik-KTT boleh ditunjukkan sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j} \\ U_{i+1,j} \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

## B. Perumusan 4 Titik-KTT

Sementara itu, skema kaedah lelaran 4 titik yang membentuk suatu sistem persamaan (4x4) dan boleh dituliskan secara umumnya sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j} \\ U_{i+1,j} \\ U_{i,j+1} \\ U_{i+1,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad (16)$$

yang,

$$S_1 = U_{i,j-1} + U_{i-1,j} - b_{i,j}^a, \quad S_2 = U_{i+1,j-1} + U_{i+2,j} - b_{i+1,j}^a$$

$$S_3 = U_{i-1,j+1} + U_{i,j+2} - b_{i,j+1}^a, \quad S_4 = U_{i+1,j+1} + U_{i+2,j+2} - b_{i+1,j+1}^a$$

Sebelum pelaksanaan skema lelaran tersebut, kekompleksan pengiraan bagi sistem persamaan (16) boleh dikurangkan menerusi teknik pengurangan kekompleksan yang ditunjukkan oleh Jumat dan Abdul Rahman (1998, 1999) serta Jumat et al. (1998). Dengan itu, skema kaedah lelaran sapuan penuh dan suku 4 Titik-KTT boleh dituliskan semula secara umumnya sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j} \\ U_{i+p,j} \\ U_{i,j+p} \\ U_{i+p,j+p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25S_1 + S_a \\ 0.25S_2 + S_b \\ 0.25S_3 + S_b \\ 0.25S_4 + S_a \end{bmatrix} \quad (17)$$

yang,

$$a_1 = S_1 + S_4, \quad a_2 = S_2 + S_3$$

$$S_a = (a_1 + 2a_2)/24, \quad S_b = (2a_1 + a_2)/24$$

## UJI KAJI BERANGKA

Untuk memperihalkan kecekapan skema kaedah lelaran 2 dan 4 Titik-KTT, beberapa uji kaji berangka telah dilakukan dengan membabitkan persamaan penghampiran unsur terhingga lima titik (13) yang dilaksanakan untuk menyelesaikan persamaan Poisson dua matra yang dinyatakan seperti berikut;

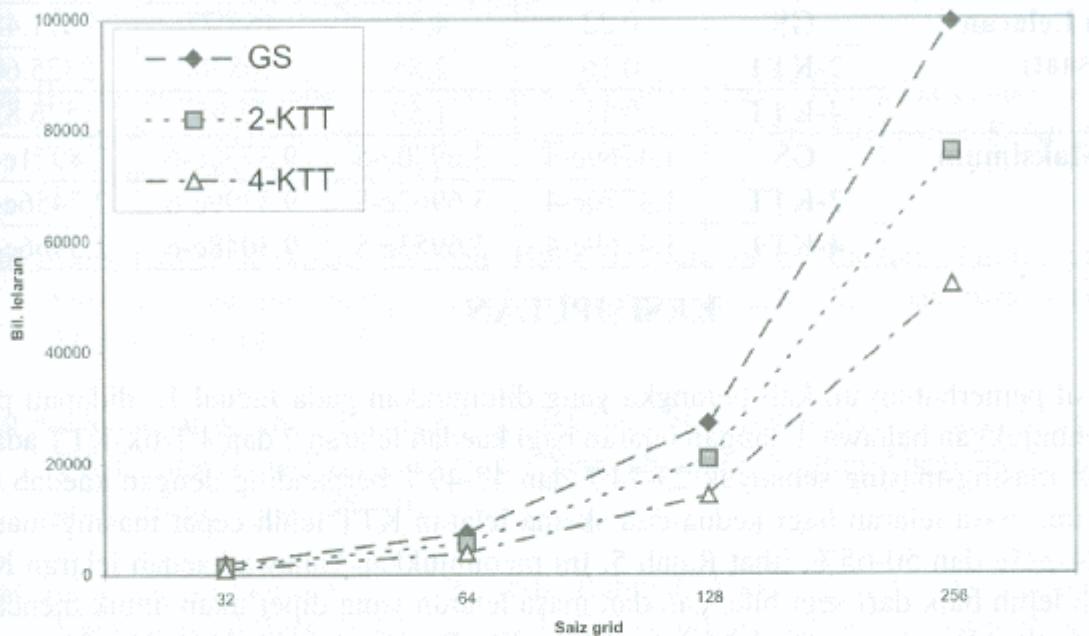
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = (x^2 + y^2) e^{xy}, \quad (x, y) \in D = [0,1] \times [0,1] \quad (18)$$

Manakala, penyelesaian tepat bagi masalah (18) yang diberikan sebagai

$$U(x, y) = e^{xy}, \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad \text{dalam maklumat mengikut jadual} \quad (19)$$

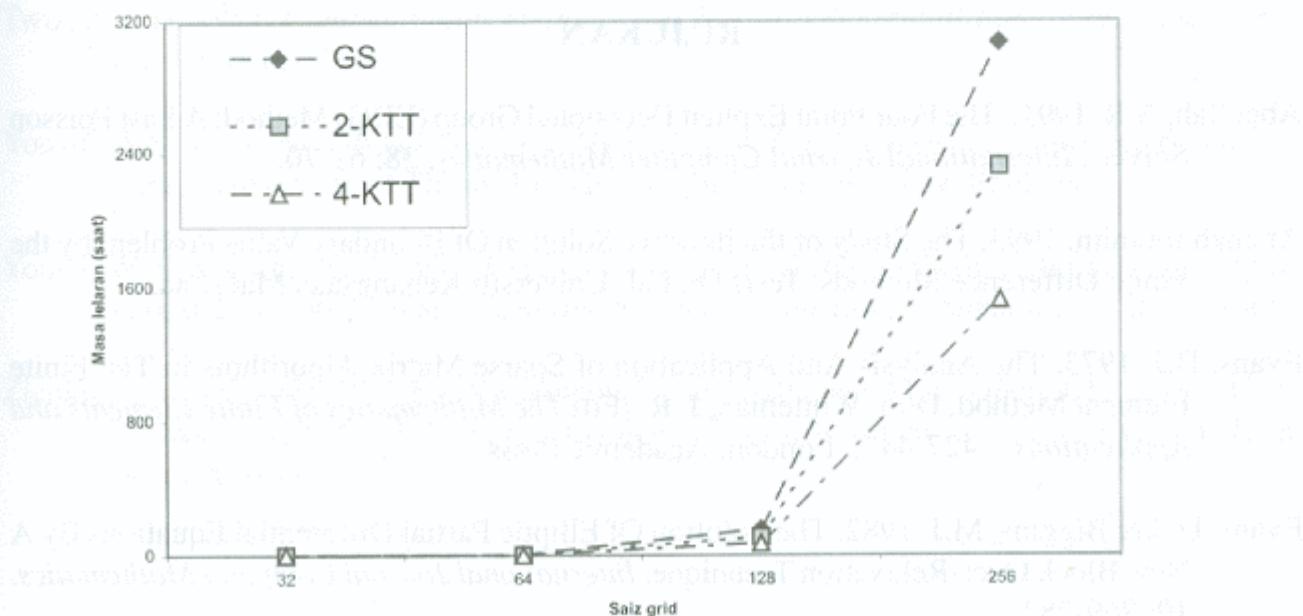
Semua keputusan uji kaji berangka yang diperolehi daripada pelaksanaan kaedah lelaran GS serta 2 dan 4 Titik-KTT telah direkodkan dalam Jadual 1. Dalam pelaksanaan uji kaji tersebut, ujian penumpuan menggunakan nilai ralat toleransi  $\epsilon = 10^{-10}$ . Disamping itu, graf pada Rajah 4 dan 5 masing-masing menunjukkan bilangan lelaran dan masa lelaran lawan saiz grid.

Bilangan lelaran lawan saiz grid



**Rajah 4. Bilangan lelaran lawan saiz grid bagi kaedah lelaran GS dan KTT bagi kes unsur segi tiga**

Masa lelaran lawan saiz grid



**Rajah 5. Masa lelaran (saat) lawan saiz grid bagi kaedah lelaran GS dan KTT bagi kes unsur segi tiga**

**Jadual 1. Perbandingan bilangan lelaran, masa lelaran(saat) dan ralat**

maksimum bagi kes unsur segi tiga untuk:  $h^{-1} = 32, 64, 128, 256, \epsilon = 10^{-10}$

Kaedah Lelaran		Saiz Subselang M			
		32	64	128	256
Bil. Lelaran	GS	1986	7368	27164	99433
	2-KTT	1512	5616	20732	76008
	4-KTT	1031	3830	14160	52020
Masa Lelaran (saat)	GS	0.22	4.51	155.77	3071.48
	2-KTT	0.16	2.85	108.98	2325.60
	4-KTT	0.11	1.59	71.95	1526.82
Ralat Maksimum	GS	1.4769e-4	3.6970e-5	9.3750e-6	2.8971e-6
	2-KTT	1.4770e-4	3.6962e-5	9.3399e-6	2.7456e-6
	4-KTT	1.4769e-4	3.6953e-5	9.3048e-6	2.5966e-6

**KESIMPULAN**

Hasil pemerhatian uji kaji berangka yang ditunjukkan pada Jadual 1, didapati pada Rajah 4 menunjukkan bahawa bilangan lelaran bagi kaedah lelaran 2 dan 4 Titik-KTT adalah berkurangan masing-masing sebanyak 23-24% dan 47-49% berbanding dengan kaedah GS. Sementara itu, masa lelaran bagi kedua-dua skema lelaran KTT lebih cepat masing-masing sebanyak 24-31% dan 50-65%, lihat Rajah 5. Ini menunjukkan bahawa kaedah lelaran KTT adalah jauh lebih baik dari segi bilangan dan masa lelaran yang diperlukan untuk mencapai penumpuan berbanding dengan kaedah lelaran GS pada pelbagai saiz grid. Walau bagaimanapun, kaedah lelaran 4 Titik-KTT pula adalah lebih baik berbanding dengan kaedah lelaran GS dan 2 Titik-KTT. Keputusan uji kaji ini juga setara dengan keputusan kajian lelaran blok yang dilakukan oleh Jumat dan Abdul Rahman (1998; 1999) serta Jumat et al. (1998).

**RUJUKAN**

- Abdullah, A.R. 1991. The Four Point Explicit Decoupled Group (EDG) Method: A Fast Poisson Solver . *International Journal Computer Mathematics*. **38**: 61-70.
- Arsmah Ibrahim. 1993. The Study of the Iterative Solution Of Boundary Value Problem by the Finite Difference Methods. Tesis Dr. Fal. Universiti Kebangsaan Malaysia.
- Evans, D.J. 1973. The Analysis And Application of Sparse Matrix Algorithms In The Finite Element Method. Dlm. Whiteman, J. R. (Ed) *The Mathematics of Finite Elements and Applications* : 427-447. London: Academic Press.
- Evans, D. J & Biggins, M.J. 1982. The Solution Of Elliptic Partial Differential Equations By A New Block Over-Relaxation Technique. *International Journal Computer Mathematics*. **10**: 269-282.

- Evans, D.J & Yousif, W. S. 1986. Explicit group iterative methods for solving elliptic partial differential equations in 3-space dimensions. *International Journal Computer Mathematics*. **18**: 323-340.
- Evans, D. J & Yousif, W. S. 1990. The explicit block relaxation method as a grid smoother in the multigrid V-cycle scheme. *International Journal Computer Mathematics*. **34**: 71-78.
- Fletcher, C.A.J. 1984. *Computational Galerkin Method*. Springer Series In Computational Physics. New York: Springer-Verlag.
- Jumat Bin Sulaiman & Abdul Rahman Bin Abdullah. 1996. Beberapa pelaksanaan kaedah multigrid bagi menyelesaikan masalah Poisson. *Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik Ke- VII*: 222-231.
- Jumat Bin Sulaiman & Abdul Rahman Bin Abdullah. 1998. Kaedah lelaran kumpulan tak tersirat dengan penghampiran beza terhingga peringkat tinggi bagi persamaan Poisson. *Matematika*. **14**: 27-37.
- Jumat Bin Sulaiman & Abdul Rahman Bin Abdullah. 1999. Beberapa Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Nyah-Pasangan Dengan Separuh sapuan Multigrid bagi Persamaan Poisson. *Sains Malaysiana*. **28**: 161-172.
- Jumat Sulaiman, Mohamed Othman & Abdul Rahman Abdullah. 1998. Skema kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai bagi persamaan resapan satu matra. *Borneo Science*. **4**: 57-66.
- Othman, M. & Abdullah, A.R. 2000. An Efficient Four Points Modified Explicit Group Poisson Solver. *International Journal Computer Mathematics*. **76**: 203-217.
- Twizell, E.H. 1984. *Computational Methods For Partial Differential Equations*. Chichester: Ellis Horwood Limited.
- Yousif, W.S. 1984. *New Block Iterative Methods For The Numerical Solution of Boundary Value Problem*. Ph.d Thesis. Loughborough University of Technology.
- Yousif, W. S. & Evans, D. J. 1986. Explicit group over-relaxation methods for solving elliptic partial differential equations. *Mathematics and Computer in Simulations*. **28**: 453-466.
- Zienkiewicz, O.C. 1975. Why Finite Elements?. Dlm. Gallagher, R.H., Oden, J.T., Taylor, C. & Zienkiewicz, O.C. (Ed.) *Finite Elements In Fluids-Volume 1*: 1-23. London: John Wiley & Sons.