BORNEO SCIENCE 8: 21-30, DECEMBER, 2000

APLIKASI KAEDAH LELARAN 2 TITIK KUMPULAN TAK TERSIRAT KE ATAS KAEDAH SONGSANGAN ASAS BAGI MASALAH PENGATURCARAAN LINEAR

Nor Haslinda Mat Junoh & Jumat Sulaiman

Sekolah Sains dan Teknologi, Universiti Malaysia Sabah,
Beg Berkunci 2073, 88999 Kota Kinabalu

ABSTRAK. *Kertas kerja ini mengemukakan aplikasi kaedah lelaran 2 Titik Kumpulan Tak Tersirat(KTT) ke atas kaedah songsangan asas untuk menyelesaikan masalah pengaturcaraan linear bagi kes pemaksimuman dengan kekangan ketaksamaan* $\leq$ *. Di akhir kertas kerja ini, satu permasalahan pengaturcaraan linear diutarakan untuk memperihalkan kecekapan pengiraan menerusi kaedah tersebut yang berpotensi sebagai kaedah alternatif.*

KATAKUNCI. Pengaturcaraan linear, kaedah lelaran kumpulan tak tersirat, kaedah songsangan asas.

ABSTRACT. *This paper present the application of 2-point Explicit Group (EG) iterative method on the basic inverse method to solve the linear programming problems on maximum case with limitation of inequality* $\leq$ *. Then, a linear programming problem has been analyzed by this method to evaluate the computational efficiency that has a potential as an alternative method.*

KEYWORDS. Linear programming, explicit group iterative method, basic inverse method.

PENGENALAN

Terdapat banyak sifat fizikal dan masalah seharian yang boleh dimodelkan dalam bentuk pengaturcaraan linear. Persamaan linear tersebut menggambarkan hubungan di antara pemboleh-pemboleh ubah dalam suatu sistem. Contohnya dalam sebuah perindustrian, faktor-faktor seperti tenaga buruh, kecekapan mesin, bahan mentah dan sebagainya harus diambil kira sebagai kekangan dalam mencapai matlamat untuk memaksimumkan keuntungan.

Kertas kerja ini hanya dipertimbangkan masalah pengaturcaraan linear yang melibatkan masalah pemaksimuman dan kekangan dengan ketaksamaan $\leq$ sahaja. Secara amnya masalah pengaturcaraan linear didefinisikan sebagai

$$\text{Maks } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{1}$$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &\leq b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

a_{ij}, b_i dan c_j dengan i=1,2,...,m dan j=1,2,...,n adalah pemalar yang diperolehi daripada tafsiran masalah. Manakala x_j, j=1,2,…,n adalah pemboleh ubah keputusan atau had ketaknegatifan.

Sebelum proses pengiraan dijalankan, masalah (1) ditukarkan kepada bentuk piawai terlebih dahulu, iaitu

$$\text{Maks } z - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_n x_n = 0 \tag{3}$$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + s_1 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + s_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + s_m &= b_m \end{aligned} \tag{4}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n$$
$$s_i \geq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

Daripada persamaan (2) dan (3), boleh diungkapkan dalam perwakilan matriks sebagai

$$\text{Maks } Z = K\,X \tag{5}$$

tertakluk kepada

$$AX = B \qquad (6)$$

dengan $X > 0$

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$
$$A = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n], \quad A_i \in \Re^m$$
$$B = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]^T$$

KAEDAH LELARAN 2 TITIK KUMPULAN TAK TERSIRAT

Pertimbangkan sebarang sistem persamaan linear kes n x n, dalam perwakilan matriks, iaitu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Jika n ganjil, maka sistem persamaan (7) boleh diungkapkan sebagai blok matriks (2X2)

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline x_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \hline b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline b_n \end{array}\right] \qquad (8)$$

Dari persamaan (8) untuk sebarang blok dua titik berturutan membentuk sistem persamaan (2x2). Katakan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned} \qquad (9)$$

Persamaan (9) boleh diungkapkan sebagai

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$s_1 = b_1 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n$$
$$s_2 = b_2 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n$$

Secara umumnya boleh dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} a_{i,i} & a_{i,i+1} \\ a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Skema kaedah lelaran 2 Titik Kumpulan Tak Tersirat (2 Titik-KTT) yang dikategorikan sebagai kaedah lelaran blok boleh diperoleh dengan menentukan songsangan matriks unsur pekali bagi sistem persamaan (10) dan diungkapkan sebagai (Jumat & Abdul Rahman, 1998; Jumat, Mohamed & Abdul Rahman, 1998; Abdul Rahman & Arsmah, 1990).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Secara amnya skema lelaran 2 Titik-KTT ini boleh ditunjukkan sebagai

$$\begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{i,i}a_{i+1,i+1} - a_{i+1,i}a_{i,i+1}} \begin{bmatrix} a_{i+1,i+1} & -a_{i,i+1} \\ -a_{i+1,i} & a_{i,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

KAEDAH SONGSANGAN ASAS

Langkah-langkah dalam kaedah songsangan asas dapat diringkaskan dan dijelaskan seperti berikut (Shaharir, 1985).

Langkah 1: Menentukan asas tersaur

Pertimbangkan:

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \end{bmatrix} \tag{13}$$

merupakan asas tersaur, maka setiap vektor $A_i \in \Re^m$ merupakan gabungan linear asas tersaur ini. Pada lelaran pertama, asas tersaur ditentukan dengan mempertimbangkan matriks identiti. Oleh itu, didapati bahawa

$$\begin{aligned} A_j &= \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i \qquad j = 1, 2, \ldots, n \\ &= CX_j \end{aligned} \tag{14}$$

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$X_j = \begin{bmatrix} x_{1j} & x_{2j} & \cdots & x_{mj} \end{bmatrix}^T \tag{16}$$

x_{ij} adalah koordinat ke-i bagi vektor A_j terhadap asas C.

Langkah 2: Menentukan nilai X_j

Pertimbangkan:

$$CX_j = B \tag{17}$$

dengan

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \cdots & b_m \end{bmatrix}^T$$

Maka nilai X_j diperolehi sebagai

$$X_j = C^{-1} B \tag{18}$$

Kaedah 2 Titik-KTT digunakan untuk mendapatkan nilai X_j, iaitu merujuk kepada persamaan (17).

Langkah 3: Menentukan pemboleh ubah masuk dan keluar

Nilai fungsi matlamat pada $(x_j, 0)$ diberikan:

$$\begin{aligned} F(x_j,0) &= Z_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} k_i x_{ij} \\ &= K_C X_j \end{aligned} \tag{19}$$

dengan K_C adalah vektor yang komponennya terdiri daripada komponen K yang sepadan dengan asas tersaur C.

$$\begin{aligned} F(x_j,0) &= Z_j \\ &= P^T A_j \end{aligned} \tag{20}$$

dengan

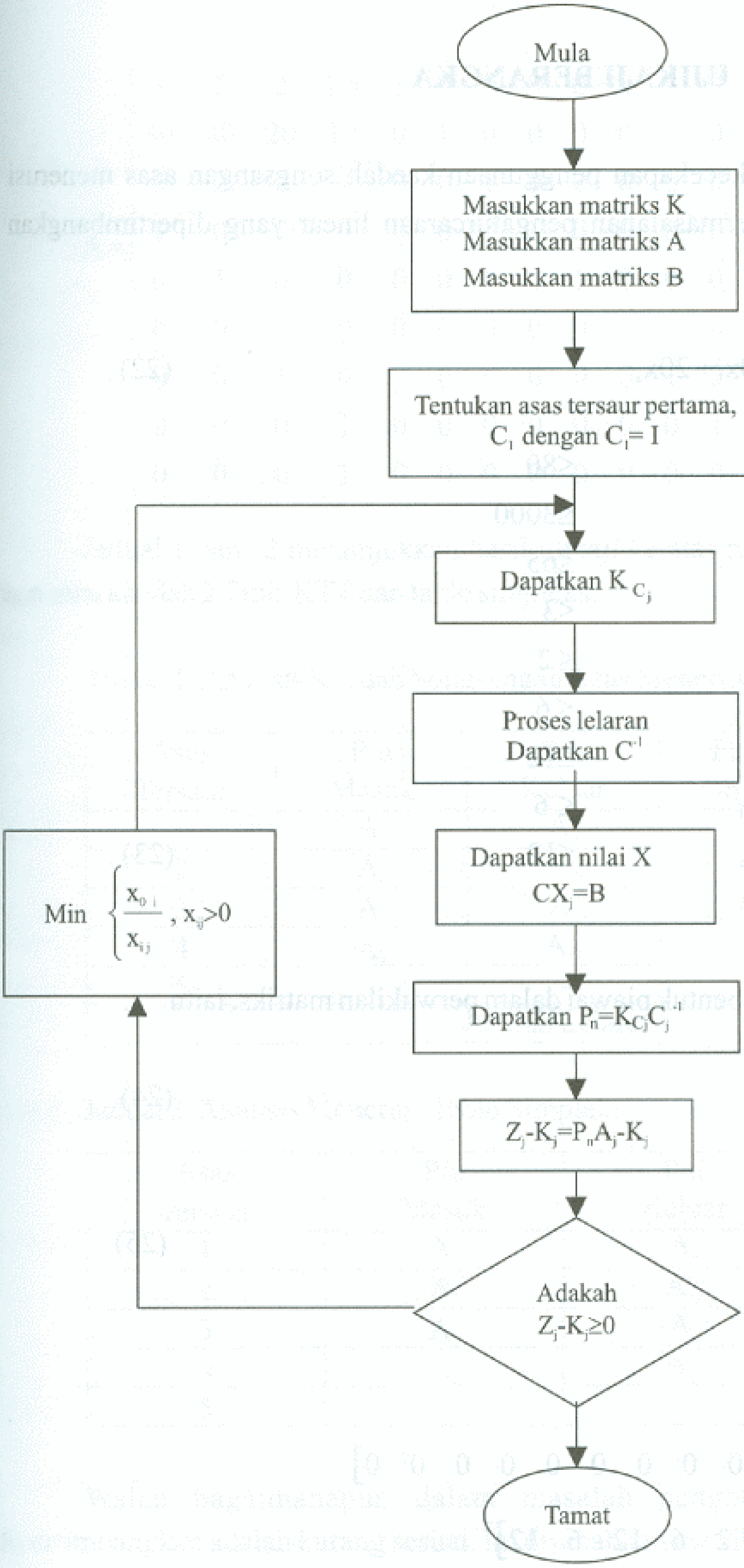
$$P^T = K_C^T C^{-1} \tag{21}$$

adalah *vektor pendarab simpleks* atau *vektor pengharga*.

Langkah 4: Asas tersaur baru

C_j dilambangkan sebagai asas tersaur ke-j yang dipilih pada lelaran ke-j. C_j dan C_{j+1} hanya berbeza pada satu lajur sahaja. Hal ini berlaku disebabkan oleh pemboleh ubah keluar diganti dengan pemboleh ubah masuk pada lajur yang sama. Manakala pemboleh-pemboleh ubah lain masih kekal pada lajur yang sama.

Pengiraan ini akan terus berulang sehingga penyelesaian optimum diperolehi, iaitu Z_j-k_j adalah semua positif untuk kes maksimum. Secara ringkasnya, pendekatan pelaksanaan menerusi kaedah lelaran 2-KTT yang dibincangkan boleh ditunjukkan pada Rajah 1.



Rajah 1. Carta Alir Kaedah Songsangan Asas Untuk Kes Maksimum Bagi Kaedah Lelaran 2 Titik-KTT

UJIKAJI BERANGKA

Dalam memperihalkan kecekapan penggunaan kaedah songsangan asas menerusi kaedah lelaran 2 Titik-KTT, permasalahan pengaturcaraan linear yang dipertimbangkan adalah berikut (Zaini, 1989).

$$\text{Maks } z = 40x_1 + 90x_2 + 50x_3 + 20x_4 \qquad (22)$$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned}
3x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 1.5x_4 &\leq 80 \\
30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 &\leq 3000 \\
3x_1 + 7x_2 &\leq 65 \\
x_1 &\leq 3 \\
x_2 &\leq 2 \\
x_3 &\leq 6 \\
x_3 &\leq 12 \\
x_4 &\leq 6 \\
x_4 &\leq 12 \qquad (23)
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Masalah (22) ditukarkan kepada bentuk piawai dalam perwakilan matriks, iaitu

$$\text{Maks } Z = KX \qquad (24)$$

tertakluk kepada

$$AX = B \qquad (25)$$

dengan $X > 0$

$$K = \begin{bmatrix} 40 & 90 & 50 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 80 & 3000 & 65 & 3 & 2 & 6 & 12 & 6 & 12 \end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & 1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 40 & 20 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadual 1 dan 2 menunjukkan hasil ujikaji ke atas masalah (24) yang dilaksanakan menerusi kaedah 2 Titik-KTT dan tablo simpleks.

Jadual 1. Analisis Kaedah Songsangan Asas Menerusi Lelaran 2 Titik-KTT

Asas Tersaur	P/u Masuk	P/u Keluar	Fungsi Objektif	Bil. Lelaran
1	A_2	A_9	720	18
2	A_3	A_{10}		19
3	A_1	A_8		20
4	A_4	A_{12}		21
5	-	-		22
Jumlah Lelaran				100

Jadual 2. Analisis Menerusi Tablo Simpleks

Asas Tersaur	P/u Masuk	P/u Keluar	Fungsi Objektif
1	A_2	A_9	720
2	A_3	A_{10}	
3	A_1	A_8	
4	A_4	A_{12}	
5	-	-	

Walau bagaimanapun dalam masalah pengaturcaraan linear (24) yang dipertimbangkan adalah kurang sesuai. Ini disebabkan matriks pekali bagi sistem persamaan (25) bersifat jarang. Akibatnya pelaksanaan skema kaedah lelaran (12) ke atas sebarang blok 2 titik berturutan tertentu adalah setara dengan pelaksanaan kaedah lelaran titik.

KESIMPULAN

Daripada hasil uji kaji pada Jadual 1 dan 2, didapati nilai fungsi objektif bagi kedua-dua kaedah tersebut adalah sama, iaitu 720. Bilangan asas tersaur dan pemboleh ubah masuk dan keluar juga adalah sama. Secara keseluruhannya didapati bahawa kaedah songsangan asas menerusi kaedah lelaran 2 Titik-KTT berpotensi dijadikan sebagai kaedah alternatif untuk menyelesaikan masalah pengaturcaraan linear dengan bilangan pemboleh ubah dan kekangan yang besar.

RUJUKAN

Abdul Rahman Abdullah & Arsmah Ibrahim. 1990. Penyelesaian Masalah Nilai Sempadan 2 Titik Menggunakan Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat (KTT) 2 Titik. *Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik Ke-IV*: 73-96.

Jumat Sulaiman & Abdul Rahman Abdullah. 1998. Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Dengan Penghampiran Beza Terhingga Peringkat Tinggi Bagi Persamaan Poisson. *Matematika*. Jilid **14**: 27-37.

Jumat Sulaiman, Mohamed Othman & Abdul Rahman Abdullah. 1998. Skema Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai Bagi Persamaan Resapan Satu Matra. *Borneo Science*. **4**: 57-66.

Shaharir Mohamad Zain. 1985. *Unsur-unsur Pengaturcaraan Linear Lanjutan*. Kuala Lumpur: Dewan Bahasa dan Pustaka

Zaini Mahbar. 1989. *Pengaturcaraan Linear: untuk Penuntut Ekonomi dan Pengurusan*. Kuala Lumpur: Dewan Bahasa dan Pustaka.